Финансы глазами математики.

Ярослав Люлько,

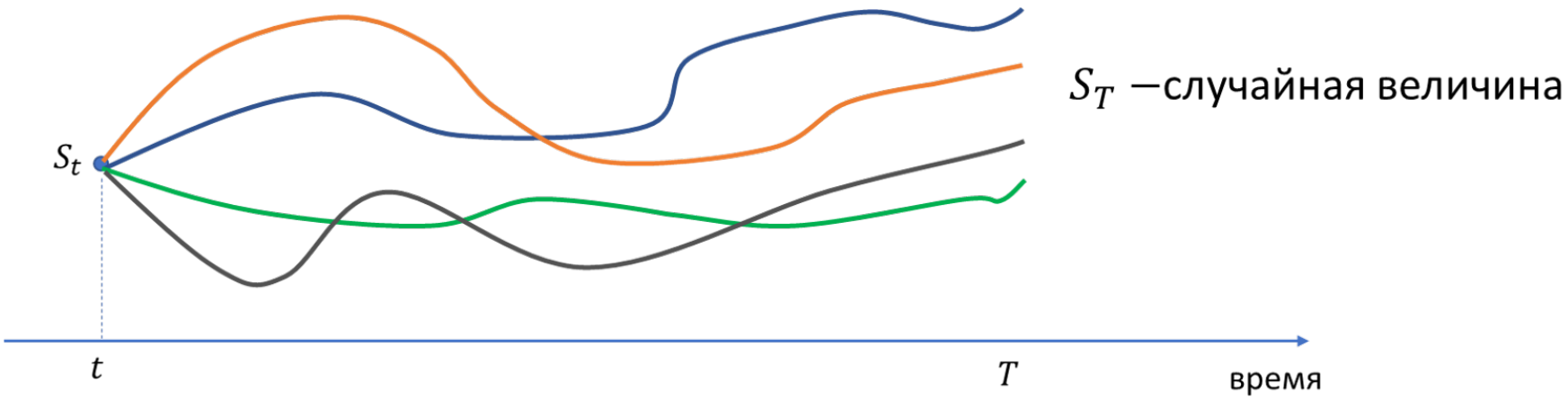
Международный Институт Экономики и Финансов (МИЭФ),
НИУ «Высшая Школа Экономики».

26 апреля, 2025

Мотивация

Пусть $(S_t)_{t\geq 0}$ – некоторый процесс, эволюционирующий во времени.

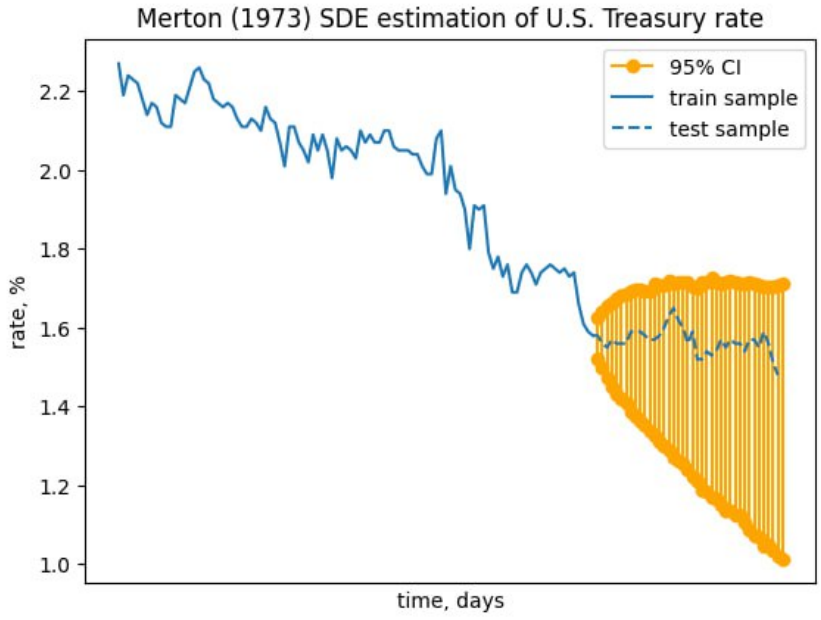
- S_t однозначно определен для каждого $t \Longrightarrow$ аналитика
- S_t определен до настоящего момента t_0 и не определен для будущих $t > t_0 \Longrightarrow$ необходима модель для предсказания будущего поведения процесса.



Мотивация

Пусть $(S_t)_{t\geq 0}$ – некоторый процесс, эволюционирующий во времени.

- S_t однозначно определен для каждого $t \Longrightarrow$ аналитика
- S_t определен до настоящего момента t_0 и не определен для будущих $t > t_0 \Longrightarrow$ необходима модель для предсказания будущего поведения процесса.



Мотивация

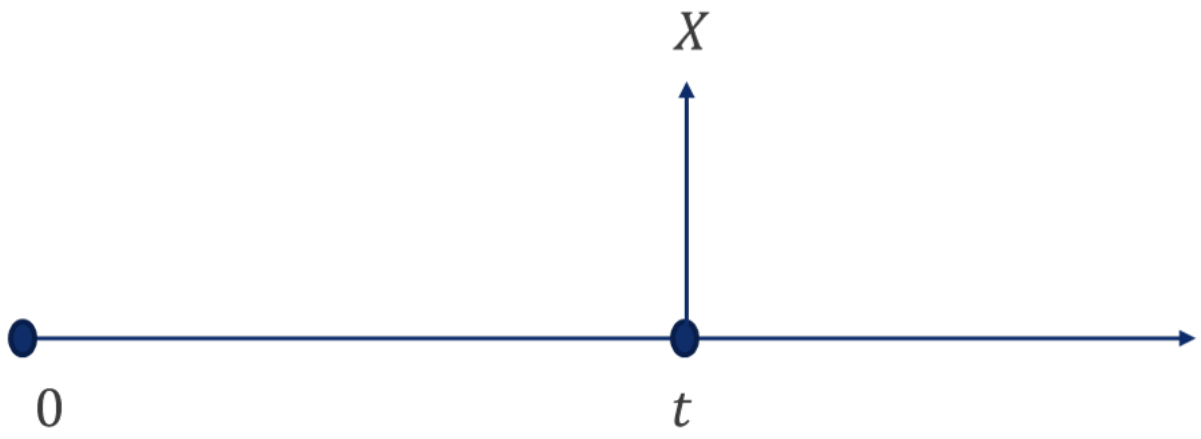
Основные задачи, решаемые при анализе финансовых инструментов:

- Предсказание: дана текущая цена S_0, нужно предсказать цену $S_T =?$ в будущий момент времени $T > 0$.
- Нахождение цен производных финансовых инструментов: справедливые цены финансовых инструментов с платежной функцией (payoff) $f(S_T)$, где $(S_t)_{t \geqslant 0}$ – цена базового актива (underlying asset).
- Риск-менеджмент: изучение событий вида $P(S_T > A) = \alpha$, $A =?$

Нефиксированный платеж (contingent claim)

$$X = X(\omega) - \text{случайная величина.}$$

Как вычислить текущее значение X?



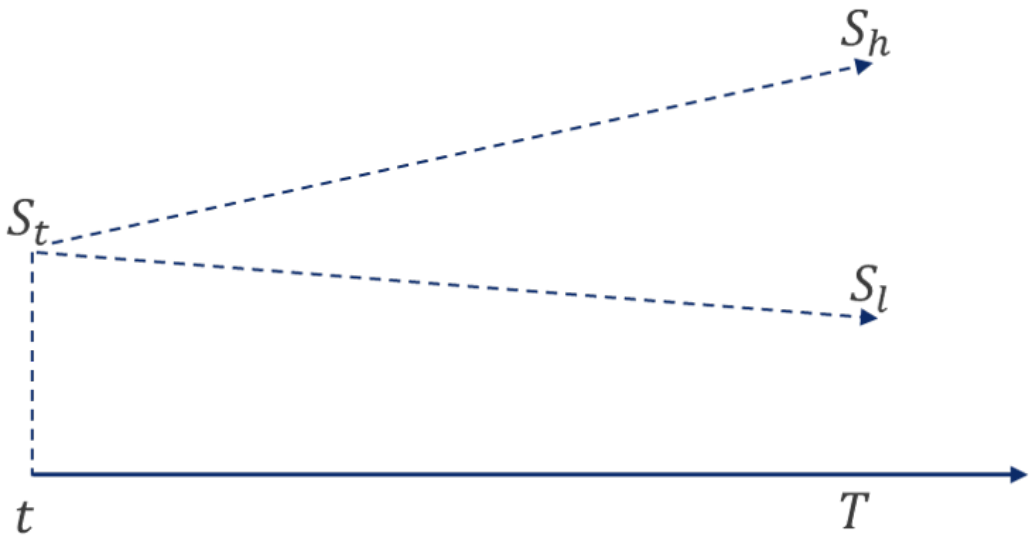
$$\frac{X(\omega)}{(1+r)^T} - \text{неизвестное значение.}$$

Как его оценить?

Базовые процессы для финансовых моделей

1-периодная модель с 2-мя состояниями

- Время $t = 0$ и $t = 1$ (“сегодня” и “завтра”)
- Безрисковый актив с процентной ставкой $r \geqslant 0$ ($\$x$ сегодня $\to \$x \cdot (1 + r)$ завтра)
- Рисковый актив с ценой S_0 сегодня и S_H или S_L завтра ($S_H > S_L$)



Риск-нейтральность в 1-периодной модели

Определение Вероятности $\{Q_H, Q_L\}$ на пространстве $\Omega = \{\omega_H, \omega_L\}$ называются риск-нейтральными, если

1. $Q_H > 0$ и $Q_L > 0$,
2. $E^Q(S_1) = (1+r)S_0$ (в смысле среднего значения).

Теорема В 1-периодной модели с 2-мя состоянии и одним рисковым активом риск-нейтральные вероятности существуют тогда и только тогда, когда

$$S_L < (1+r)S_0 < S_H.$$

Более того, если $\{Q_H, Q_L\}$ существуют, то они единственны.

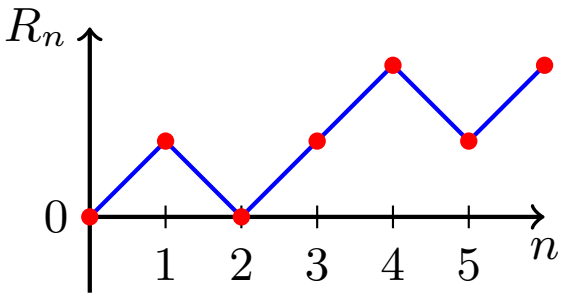
Случайное блуждание

– случайный процесс $(R_n)_{n\geqslant 0}$ такой, что

$$R_n = X_1 + \ldots + X_n, \;\; R_0 = 0$$

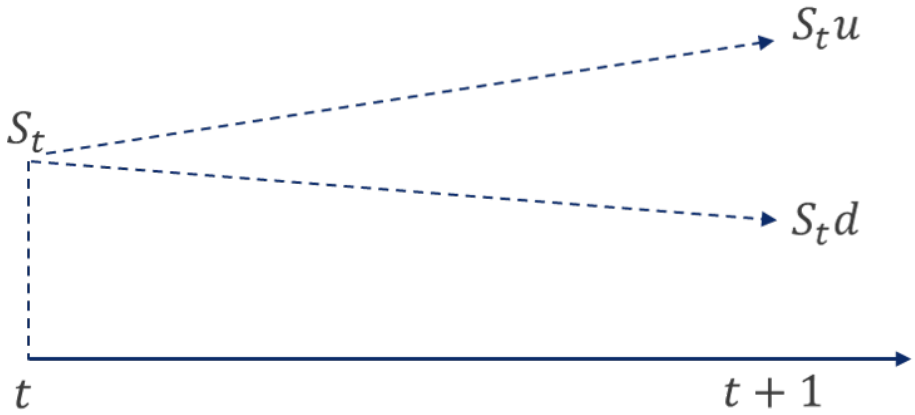
где $X_1, \ldots, X_n$ независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением

X	-1	1
P	$1-p$	p



Биномиальная модель

- S_t - текущий момент времени.
- В следующий момент времени $t+1$ цена может вырасти в u раз или упасть в d раз. То есть цена $S_{t+1} = S_t Y_{t+1}$, где Y_{t+1}- изменение цены.



- Таким образом, $S_T = S_t Y_{t+1} Y_{t+2} \dots Y_T$

Биномиальная модель

Цена $(S_n)_{n\geqslant 0}$ такова, что S_0 фиксирована и

$$S_n = S_0 Y_1 Y_2 \dots Y_n$$

Изменения цен $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с

Y	d	u
P	$1-q$	q

Банковский счет $B_n = B_0(1+r)^n$.

Риск-нейтральность: $E(S_1) = (1+r)S_0$ влечет $q = \dfrac{1+r-d}{u-d}$

Финансовые понятия

Определение портфеля

Финансовые активы, использующиеся для построения портфеля, делятся на 2 типа: рисковые и безрисковые

Безрисковый актив (riskless asset) – банковский счет

B_0 – начальное количество денег, r – процентная ставка

$$B_t = \begin{cases} B_0(1+r)^t & \text{стандартное начисление \%} \\ B_0 e^{rt} & \text{непрерывное начисление \%} \end{cases}$$

Определение портфеля

- Безрисковый актив (**riskless asset**) – банковский счет

$$B_t = B_0(1+r)^t$$

- Рисковый актив (**risky asset**) – акция с ценой S_t

S_0 известна, S_t при $t > 0$ – случайная величина

Портфелем называется пара (a, b)

количество денег на вкладе

количество акций

Как рассчитать **стоимость портфеля V_t** в момент времени t?

Пример (портфель из акций Google)

Пусть ставка по вкладу $r = 0.12$ (то есть 12% годовых)

t = 0 (4 января 2010 г) стоимость акции $S_0 = 15.61\$$

Рассмотрим портфель $(-15.61, 1)$. Его стоимость $V_0 = 0$

t = 1 (2 января 2014 г) стоимость акции $S_1 = 27.72\$$

$$V_1 = -15.61(1 + 0.12)^4 + 1 \cdot 27.72 = 3.16\$$$

Стоимость портфеля

Стоимость портфеля V_t в момент времени t:

$$t = 0: V_0 = a + bS_0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$t = n: V_n = a(1+r)^n + bS_n$$

Если имеется N рисковых активов $S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, \dots, S_t^{(N)}$, то портфелем будет вектор $(a, b_1, b_2, \dots, b_N)$.

Стоимостью портфеля $(a, b_1, b_2, \dots, b_N)$ будет

$$\boldsymbol{V_t = a(1+r)^t + b_1 S_t^{(1)} + b_2 S_t^{(2)} + \dots + b_N S_t^{(N)}}$$

S_t^1

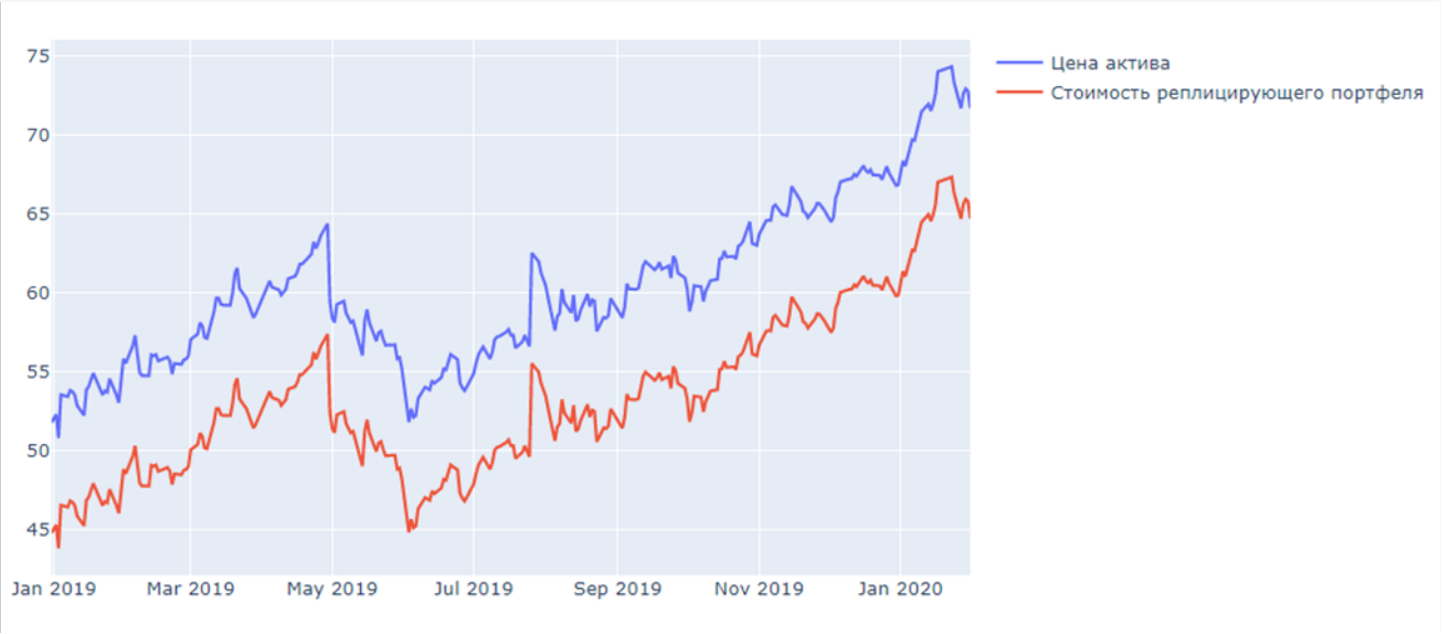
S_t^2

S_t^N

Репликация (replication)

Предположим, у нас есть некоторый актив, например, производный финансовый инструмент.

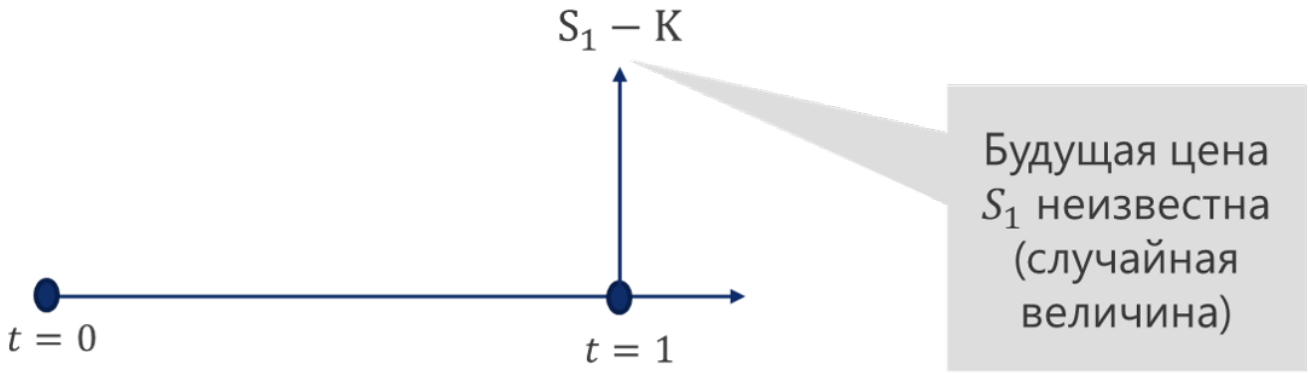
Цель: составить портфель из базовых инструментов, который по стоимости ведет себя так же, как и изучаемый актив



Репликация Форварда

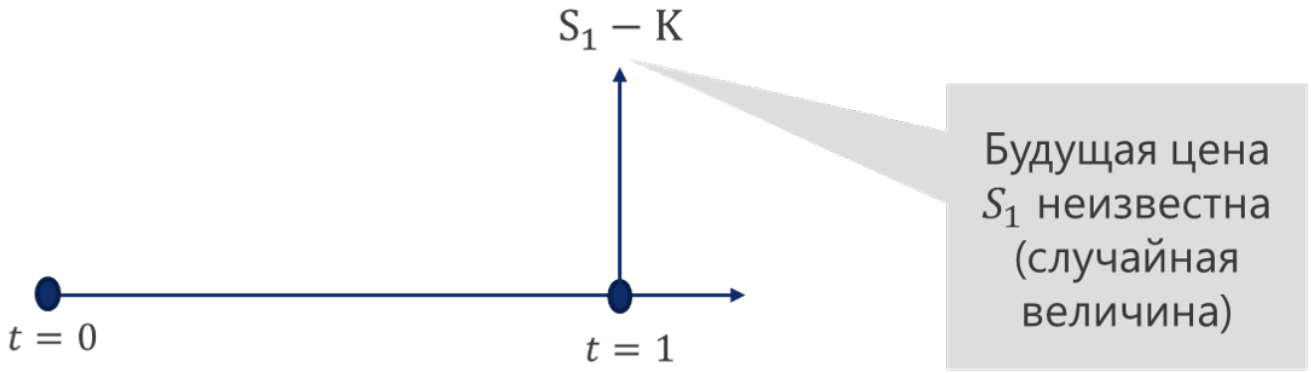
Пример. Пусть $r = 10\%$ годовых. Текущая цена акции при $t = 0$ равна $S_0 = 100$.

Мы хотим заключить форвардный контракт (Forward) на покупку акции по цене $K = 95$ в следующем периоде $t = 1$.

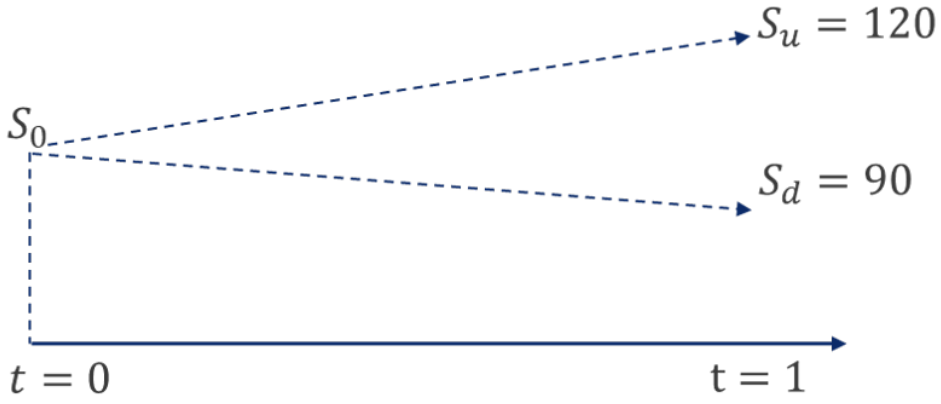


Как составить реплицирующий портфель?

Репликация Форварда



Предположим, модель (1-периодная модель) выдает следующие предполагаемые значения для S_1:



Определение репликации

Определение Портфель H реплицирует платеж X (в 1-периодной модели), если

$$V_1(H, \omega) = X(\omega) \text{ для всех } \omega \in \{\omega_L, \omega_H\}.$$

Если H реплицирует X мы определим справедливую цену X как $V_0(H)$. Обозначение: $PV(X)$.

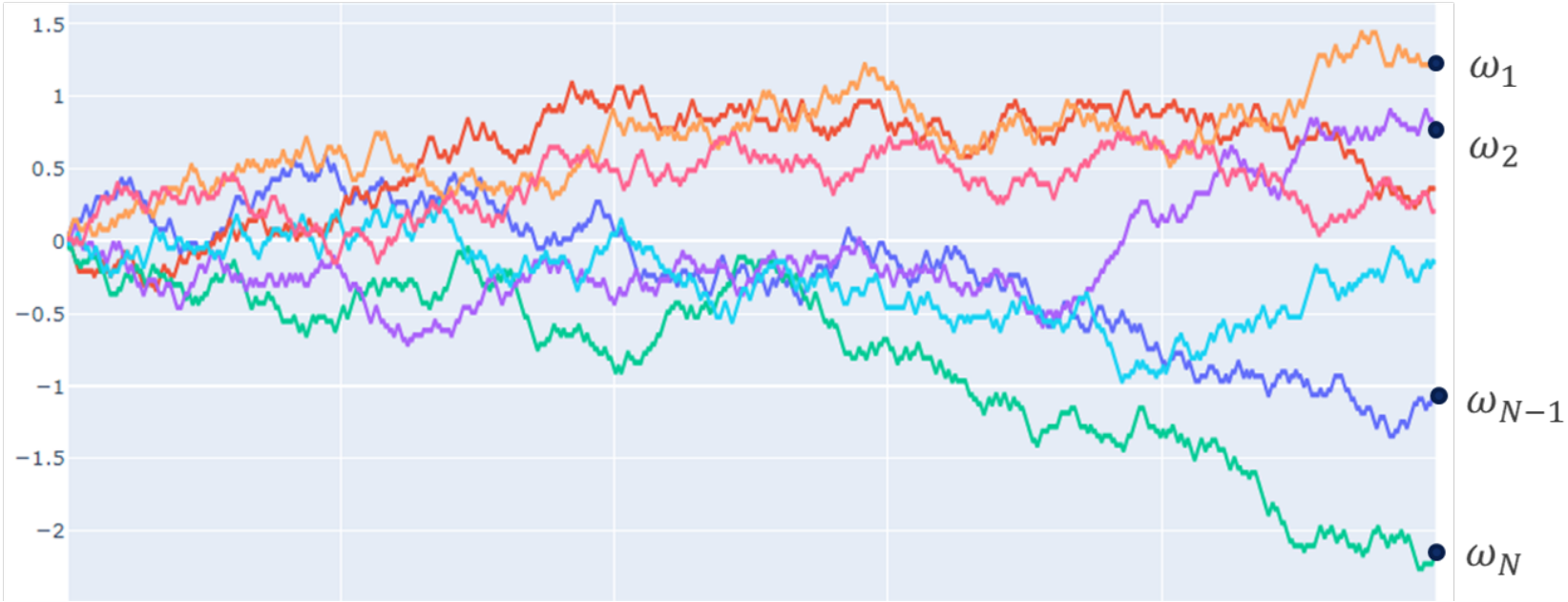
Вопросы

1. Всегда ли существует реплицирующий портфель?
2. Является ли реплицирующий портфель уникальным? (или, по крайней мере, уникальна ли цена $V_0(H)$?)

Арбитраж

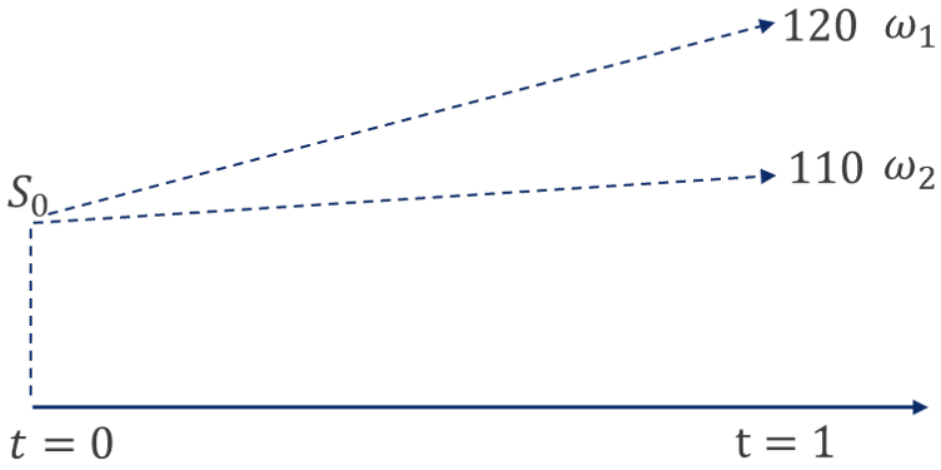
—стратегия, дающая возможность **безрискового** получения прибыли

При моделировании поведения цены акции может возникнуть несколько сценариев $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$.



Пример. Пусть $r = 10\%$ годовых. Текущая цена акции при $t = 0$ равна $S_0 = 100$.

Модель для S_1: $S_1(\omega_1) = 120$ или $S_1(\omega_2) = 110$



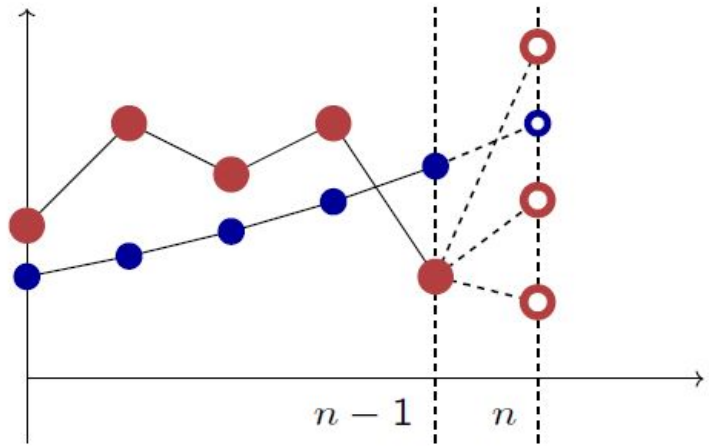
Определение арбитража

Портфель H **реализует арбитраж**, если

1) $V_0(H) = 0$ (не вкладываем собственные средства)

2) Для любого состояния рынка ω стоимость $V_1(H)(\omega) \geq 0$
(не можем получить убыток при любом сценарии)

3) Существует состояние рынка ω_0 такое, что $V_1(H)(\omega_0) > 0$
(как минимум в одном случае мы получим чистую прибыль)



Пример

Существует ли арбитраж в данной модели?

N	S_0^N	S_1^N		
		ω_1	ω_2	ω_3
0	1	10/9	10/9	10/9
1	5	60/9	60/9	40/9
2	10	40/3	80/9	80/9

Торговые стратегии

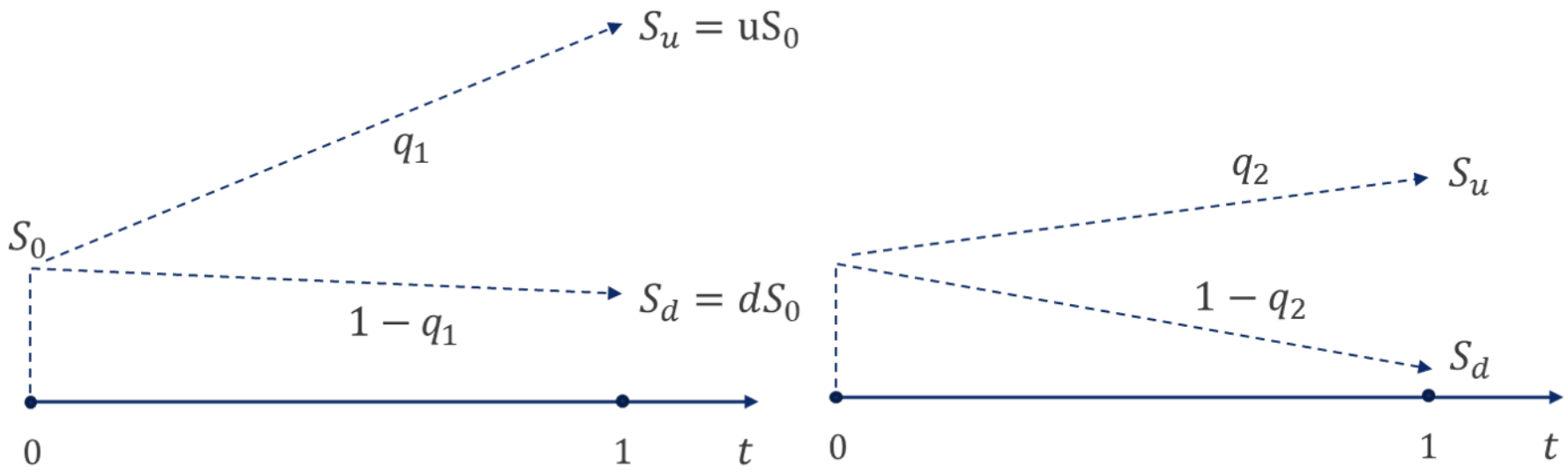
Рассмотрим портфель $H = (a, b^{(1)}, b^{(2)})$. Что, если коэффициенты $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ начнут эволюционировать во времени, то есть $b^{(1)} = b_t^{(1)}$, $b^{(2)} = b_t^{(2)}$?

- Коэффициенты $b_t^{(1)}$, $b_t^{(2)}$ называются предсказуемыми, если в момент t они зависят от цен базовых активов $S_1, \ldots, S_{t-1}$ до момента $t-1$.

- Торговой стратегией называется предсказуемая последовательность $H_t = (a_t, b_t^{(1)}, b_t^{(2)})$, $t = 1, 2, \ldots, T$, где $b_t^{(i)}$ – количество акций i, которое мы покупаем в момент $t-1$ (может быть отрицательным).

- Стоимостью торговой стратегии в момент времени t называется
$$V_t(H) = a(1+r)^t + b_t^{(1)} S_t^{(1)} + b_t^{(2)} S_t^{(2)} = (H_t, S_t).$$

Нейтральность к риску (risk-neutrality)



Как правильно выбрать параметр q?

1) $d < r < u$ (невырожденность активов)

2) $\boldsymbol{E^q(S_1) = (1 + r)S_0}$ (риск-нейтральность)

Фундаментальные теоремы

Теорема (FTAP – fundamental theorem of asset pricing) Риск-нейтральная мера Q существует тогда и только тогда, когда в данной модели отсутствует арбитраж (NA):

$$\boxed{\exists\, Q \iff \mathrm{NA}}$$

Теорема (2nd FTAP) Модель рынка является полной тогда и только тогда, когда существует единственная риск-нейтральная мера:

$$\boxed{\exists!\, Q \iff \mathrm{Complete}}$$

Мартингал (martingale)

- Концепция *мартингала* лежит в основе оценки финансовых инструментов и анализа рынка.
- Основная идея мартингала происходит из теории игр.

- Пример. Два равных по силе игрока. Игра состоит из множества раундов, в каждом раунде возможна либо победа, либо поражение (ничьих нет). Тогда прибыль игрока 1 после N раундов

  Прибыль(N) = выигрыш раунд 1 + выигрыш раунд 2 + … +выигрыш раунд N

является мартингалом.

Финансовый рынок
- Существует мартингал -> справедливый рынок -> нет возможностей для получения гарантированной прибыли
- Нет мартингала -> существует возможность гарантированной прибыли (**Арбитраж**)

Доходность портфеля

Если X_t — цена актива в момент времени t, то **доходностью** актива в период между $t = 0$ и $t = 1$ называется величина

$$R_1 = \frac{X_1 - X_0}{X_0}$$

- Если $V_t(\mathrm{H}) = a(1 + \mathrm{r})^{\mathrm{t}} + b\mathrm{S}_{\mathrm{t}}$ —стоимость портфеля $H = (a, b)$, то **доходность портфеля** за 1 период равна

$$R_1(H) = \frac{V_1(H) - V_0(H)}{V_0(H)}$$

Средняя доходность и риск портфеля

Средняя доходность портфеля

$$\mathrm{E}(R_1(H)) = E\left(\frac{V_1(H) - V_0(H)}{V_0(H)}\right)$$

Риск характеризуется отклонением от ожидаемой доходности

Нужно рассчитать дисперсию $\boldsymbol{Var(R_1(H))}$ и стандартное отклонение $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{Var(R_1(H))}}$

Основная задача портфельного анализа – составление таких портфелей H, что

1) $E(R(H)) \to max$ (**максимизация доходности**)

2) $\sigma_H = \sqrt{Var(R(H))} \to min$ (**минимизация рисков**)

Модель Bachelier (1900)

Bachelier model (1900) – первая модель финансовой математики

S_t – цена акции в текущий момент времени t.

$$\boldsymbol{S_t = S_0 + \mu t + \sigma \varepsilon_t}$$

шум

тренд волатильность

Классическая постановка: $r = 0$, $B_t = B_0 = const$ – банковский счет

Вопросы:

1) Каким образом моделировать шум ε_t?
2) Как оценить параметры μ, σ по историческим данным?

Оценка шума и тренда

1. Оценкой шума ε_t служит броуновское движение $W_t \sim N(0, t)$
2. Оценкой тренда $\hat{\mu}$ может служить наклон линии регрессии

Ищем *линейную* зависимость $S = \alpha + \beta t$, при этом считая, что данные «**зашумлены**», то есть предоставлены с небольшими ошибками

$$\boxed{\boldsymbol{S_i = \alpha + \beta t_i + e_i, i = 1, \dots n}}$$

e_i — ошибка измерения точки i

$$\boldsymbol{\hat{\mu} = \hat{\beta}}$$

Расчет волатильности

Волатильность $\hat{\sigma}$ можно рассчитывать как суммарное отклонение от линии тренда

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2}{n}}$$

Существуют ли другие способы оценки волатильности?

Спасибо за внимание!

онлайн-курс **“Математика на службе у финансов”**: https://icef.hse.ru/math-finance

Контакт: ylyulko@hse.ru