Тридцатая Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Заключительный этап

Москва, 2025 год

Задания и решения

11 класс

Первый тур

Задача 1. *Блиц* *(12 баллов)*

В первом задании олимпиады вам предстоит решить три не связанных друг с другом коротких задачи.

а) *(4 балла)* В январе 2025 года китайская компания *DeepSeek* представила чат-бота на основе собственной большой языковой модели. По заявлению компании, новая технология обучения модели потребовала в несколько раз меньше вычислительных ресурсов, чем у конкурентов. Это вызвало ожидания снижения спроса на графические процессоры, и акции *NVIDIA* — крупнейшего их производителя — резко упали.

Рассмотрим фирму «Джевонс и Ко», использующую чипы *NVIDIA* для производства нейросетевых решений. Чтобы выпустить q единиц продукта, фирма использует x чипов, производственная функция $q = a\sqrt{x}$, где $a > 0$. Рыночная цена продукта составляет 2 д.е. за единицу, один чип стоит 1 д.е. Распространение новой технологии повышает параметр a с 2 до 5. Рассчитайте, как изменится количество закупаемых фирмой чипов, и содержательно объясните направление этого изменения.

б) *(4 балла)* Из города А в город Б идут две дороги: старая и новая, проезд по ним бесплатный. Если по старой дороге едут x машин в час, то время в пути между городами составляет $40 + \frac{x}{20}$ минут. Если по новой дороге едут y машин в час, то время в пути между городами составляет $30 + \frac{y}{30}$ минут. Суммарный поток по двум дорогам составляет 1000 машин в час. Каждый водитель выбирает дорогу так, чтобы минимизировать сумму денежной ценности своего времени в пути (минуту своего времени он ценит в 10 рублей) и платы за проезд (если она есть). Время в пути водитель узнаёт через навигатор, использующий текущие данные загруженности дорог; небольшой собственный вклад в загруженность дороги никто не учитывает. В министерстве транспорта заметили, что новая дорога слишком загружена, и решили сделать ее платной. Какую плату p за проезд по новой дороге следует установить, чтобы минимизировать суммарное время в пути всех водителей на двух дорогах?

в) *(4 балла)* В деревне есть 60 крестьянских хозяйств, каждое из которых располагает 1 единицей земли и 5 единицами рабочего времени. Жители деревни умеют выращивать пшеницу и лён, а также выпекать хлеб и изготавливать ткань. Производство единицы пшеницы требует 5 единиц рабочего времени и 1 единицы земли, а производство единицы льна требует только 1 единицы земли и не требует труда. Производство единицы хлеба требует 1 единицы пшеницы и 1 единицы рабочего времени. Производство единицы ткани требует единицы льна и 4 единиц рабочего времени. Опишите формулой вида $y = f(x)$ (где x — хлеб, y — ткань), как устроена КПВ этой экономики.

Решение

а) Прибыль фирмы составляет

$$\pi(x) = pq - cx = 2a\sqrt{x} - x.$$

Это квадратичная функция (парабола ветвями вниз) от $\sqrt{x}$, следовательно, максимум достигается при $\sqrt{x} = a$, откуда $x = a^2$.

Таким образом, спрос «Джевонс и Ко» на чипы до появления DeepSeek (при $a = 2$) был равен 4, а после появления DeepSeek ($a = 5$) увеличился до 25.

Объяснение. В результате появления DeepSeek MRP_x (предельная отдача от использования чипов в денежном выражении) увеличилась: каждый следующий чип стал приносить больше выпуска, т.е. больше выручки при тех же ценах. Поскольку затраты на чипы не изменились, выгодно расширить производство, пока использование дополнительных чипов не перестанет окупаться.

Таким образом, несмотря на повышение эффективности использования ресурса, его потребление выросло. Этот эффект известен в экономике как *парадокс Джевонса* (например, технология, экономящая топливо, ведёт к повышению его суммарного расхода).

б) Пусть транспортные потоки распределились так: y машин в час едут по новой дороге, а $1000 - y$ машин в час — по старой дороге. Если плата за пользование новой дорогой составляет p, то суммарные денежно-временные затраты водителя, выраженные в рублях, составляют $400 + \frac{1000-y}{2}$, если он едет по старой дороге, и $300 + \frac{y}{3} + p$, если он едет по новой дороге. Водитель поедет по новой дороге, если $300 + \frac{y}{3} + p < 400 + \frac{1000-y}{2}$, т.е. если $y < 720 - \frac{6}{5}p$, и по старой, если $y > 720 - \frac{6}{5}p$.

Если $y < 720 - \frac{6}{5}p$, то водители, выезжающие на развилку между новой и старой дорогой, выберут новую дорогу, так что поток y по ней будет расти, пока не станет равен $720 - \frac{6}{5}p$, и до этого же значения он будет падать, если $y > 720 - \frac{6}{5}p$. Следовательно, спрос на пользование новой дорогой при стоимости проезда p составляет $y(t) = 720 - \frac{6}{5}p$.

При потоке y по новой дороге суммарные потери времени всех водителей составляют

$$(1000 - y)\left(40 + \frac{1000 - y}{20}\right) + y\left(30 + \frac{y}{30}\right) = \frac{5}{60}y^2 - 110y + 90000.$$

Это квадратичная функция (парабола ветвями вверх), достигающая минимума по y при $y = 660$.

Следует установить такую стоимость проезда p, чтобы достичь оптимальной загрузки новой дороги $y(p) = 720 - \frac{6}{5}t = 660$. Отсюда оптимальная стоимость проезда p составляет 50 рублей.

в) Пусть в деревне произведено x единиц хлеба. Это означает, что произведено не менее x единиц пшеницы и на производство хлеба затрачено не менее x единиц рабочего времени. На всю производственную цепочку, дающую на выходе хлеб, затрачено не менее x единиц земли и не менее $6x$ единиц рабочего времени. Следовательно, на производственную цепочку, дающую на выходе ткань, остаётся не более $60 - x$ единиц земли и не более $300 - 6x$ единиц рабочего времени. Из такого количества ресурсов можно произвести не более $60 - x$ единиц льна, т.е. не более $\min\left\{60 - x, 75 - \frac{3}{2}x\right\}$ единиц ткани. Этот объём производства ткани достижим, так как в предыдущих рассуждениях, где нужно, можно заменить «не менее» и «не более» на «ровно». Хлеба не может быть произведено больше 50 единиц, а ткани — больше 60 единиц.

Ответ: $y = \min\left\{60 - x, 75 - \frac{3}{2}x\right\}$, $0 \leqslant x \leqslant 50$.

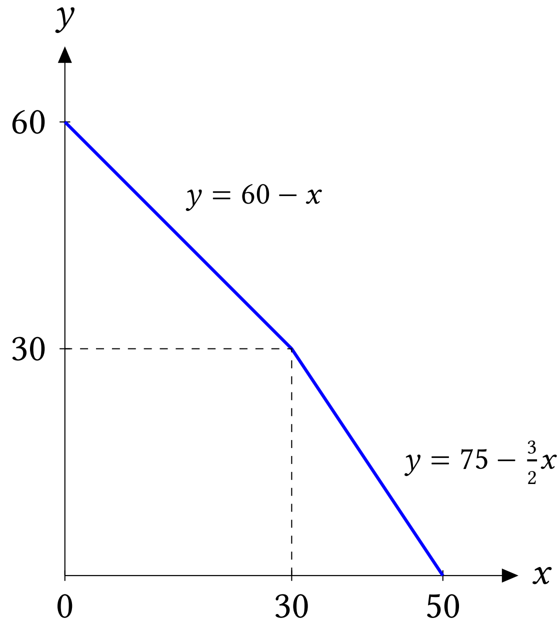


Схема проверки

а)

К1 Получен вывод, что использование чипов увеличилось с 4 до 25 → 2 балла

К1.1 Арифметическая ошибка → минус 1 балл

К1.2 Не подставлены значения a → минус 1 балл

К2 Дано содержательное объяснение → 2 балла

К2.1 Правильные объяснения (2 из 2 баллов) используют:

* повышение MRP_x
* повышение предельной производительности
* снижение издержек на производство единицы продукции
* повышение эффективности производства

К2.2 Неправильные объяснения (0 из 2 баллов):

* упоминание MR без формулы ($MR = p = 2$ не изменилась)
* стоимость акций упала (не объясняет эффекта)
* увеличение объёма производства (без доп. пояснений)
* при росте x выручка растёт (без доп. пояснений)

б)

К3 Получен спрос $y(p) = 720 - \frac{6}{5}p$ или эквивалентное выражение → 1 балл

К4 Правильно выписана целевая функция (суммарные потери времени) → 1 балл

К5 Найдено оптимальное распределение потоков (или дошли до К6 без этого) → 1 балл

К6 Найдена оптимальная плата за проезд $p = 50$ → 1 балл

К7 Арифметические ошибки, не влияющие на качественные выводы → минус 1 балл

- К8 Арифметические ошибки, влияющие на качественные выводы (например, $p = 0$ или $p < 0$) $\to$ минус 2 балла
- К9 Использование числа 999 $\to$ минус 1 балл (из 1000 машин/час вычитается одна машина)

в)

- К10 Получена формула для куска КПВ $y = 60 - x \to 1$ балл
- К11 Получена формула для куска КПВ $y = 75 - \frac{3}{2}x \to 1$ балл
- К12 Правильно найдена взаимосвязь кусков $\to$ 2 балла
  - К12.1 Есть рисунок, нет формулы $y = f(x) \to$ минус 1 балл
  - К12.2 Найдена точка излома, но взята верхняя огибающая вместо нижней $\to$ 0 из 2 баллов
  - К12.3 Ошибка в нахождении ключевых точек $\to$ минус 1 балл
  - К12.4 Нет указания, что $x \geqslant 0$ и $x \leqslant 50 \to$ без снижения
- К13 Арифметические ошибки в К10, К11 (в том числе, если один кусок оказался ниже другого и это было проверено) $\to$ минус 1 балл

Задача 2. *Тарифы президента* *(12 баллов)*

Страна А имеет дефицит торгового баланса с остальным миром, при этом с разными странами величина этого дефицита разная, а с некоторыми странами торговый баланс положительный. Президенту страны А не нравятся торговые дефициты, и он хочет свести их к 0 с теми странами, с которыми они сейчас есть. Экономические советники предложили ему поднять импортную пошлину (тариф) на товары из каждой страны i, с которой сейчас есть торговый дефицит, на следующее количество процентных пунктов:

$$\Delta\tau_i = \frac{x_i - m_i}{\varepsilon \cdot \varphi \cdot m_i}.$$

Здесь ε — эластичность спроса на импорт в стране по цене импорта, φ — полуэластичность[1] цены импорта по ставке тарифа, x_i и m_i — текущие значения экспорта и импорта со страной i. Считайте, что «цена импорта» — это некоторая средняя цена, измеряемая индексом.

а) *(4 балла)* Покажите, что формула, предложенная советниками, имеет смысл, то есть введение пошлин в соответствии с ней может привести к обнулению торгового дефицита. Укажите необходимые предпосылки, приняв которые, можно прийти к этой формуле.

б) *(3 балла)* Используя эту формулу, президент намерен увеличить тарифы на величины до 50 процентных пунктов, рассчитывая, что дефицит торгового баланса сведется к нулю. Объясните, почему в реальности при таком увеличении тарифов обнуления торгового дефицита, скорее всего, не случится.

в) *(1 балл)* Объясните, как страна может иметь торговый дефицит с остальным миром на протяжении долгого времени — в частности, откуда она будет брать иностранную валюту на закупку импортных товаров?

г) *(4 балла)* Ведущие экономисты страны А выступили с заявлением, что предлагаемое повышение тарифов, хоть и является в теории протекционистской мерой, на деле может сделать отечественным производителям (особенно сложных товаров) хуже. Приведите два аргумента, почему это может оказаться так.

Решение

а) Торговый баланс между страной А и страной i равен $TB_i = x_i - m_i$. Задача — найти такое изменение тарифа $\Delta\tau_i$, которое обнуляет торговый баланс: $x_i = m_i'$, где m_i' — импорт после введения тарифа.

- эластичность импорта по цене — $\varepsilon = \frac{\%\Delta m_i}{\%\Delta p}$;
- полуэластичность цены по тарифу — $\varphi = \frac{\%\Delta p}{\Delta\tau_i}$.

Предпосылки:

- валютный курс и экспорт не меняются при вводе тарифа;

[1] Полуэластичностью y по x здесь называется соотношение процентного изменения y и абсолютного изменения x. В данном случае φ отвечает на вопрос, на сколько процентов изменится цена импорта при изменении ставки тарифа на один процентный пункт.

- изменения тарифов малы (<10 %), и значит может быть использована формула точечной эластичности.

Тогда:

$$\frac{m_i' - m_i}{m_i} = \frac{\Delta m_i}{m_i} = \varepsilon \cdot \frac{\Delta p}{p} = \varepsilon \cdot \varphi \cdot \Delta \tau_i$$

или:

$$m_i' = m_i \cdot (1 + \varepsilon \cdot \varphi \cdot \Delta \tau_i)$$

Требуемое условие: $m_i' = x_i \Rightarrow x_i = m_i(1 + \varepsilon \cdot \varphi \cdot \Delta \tau_i)$. Решаем относительно $\Delta \tau_i$:

$$\Delta \tau_i = \frac{x_i - m_i}{\varepsilon \cdot \varphi \cdot m_i}$$

что и требовалось показать.

б) В реальности формула не сработает по следующим причинам:

- экспорт x_i может также измениться, если страна i введет ответные меры, изменится валютный курс или из-за других причин;
- если тарифы >10 %, то формула, использующая (точечную) эластичность, может дать очень неточный результат.

В результате даже при большом увеличении тарифов импорт может не сократиться настолько, чтобы сбалансировать торговлю.

в) Если страна систематически импортирует больше, чем экспортирует, это означает, что она финансирует дефицит счета текущих операций за счет:

- притока капитала (например, иностранные инвестиции, займы, покупка активов);
- продажи золотовалютных резервов.

Таким образом, торговый дефицит компенсируется профицитом по финансовому счету платежного баланса.

г) Несмотря на протекционистский характер, повышение тарифов может навредить отечественным производителям, потому что:

- многие производственные цепочки используют импортные компоненты, сырье или оборудование. Повышение тарифов увеличит издержки производства и снизит конкурентоспособность продукции на внутреннем и внешнем рынках;
- ввод тарифа снизит спрос на импортную продукцию и вместе с ней спрос на иностранную валюту. Отечественная валюта подорожает, что снизит конкурентоспособность отечественных производителей.

Схема проверки

а) 4 балла, из них:

+2 Вывод формулы. Если приведены только правильные математические формулировки эластичности и полуэластичности, а затем ошибка, то ставился 1 балл. Если ошибки и в формулировках, то 0 баллов.

+2 По одному баллу за формулировку двух предпосылок: малые изменения и стабильность других параметров (экспорт, валютный курс). Не обязательно писать пример и пояснять, тут можно просто сформулировать.

б) 3 балла, из них:

+1 Сказано про большое изменение и объяснено, что формула для больших изменений может не работать.

+2 Сформулирована причина и экономический механизм нарушения стабильности (ответные меры, изменение курса и пр.).

в) 1 балл за любую из причин (займы, продажа резервов, иностранные инвестиции) или упоминание профицита по финансовому счету платежного баланса.

г) 4 балла, из них по 2 балла за каждый пример при условии объяснения экономического механизма. В случае недостатка обоснования за правильный пример 1 балл. Примеры должны быть различными и не быть про одно и то же (например, один пример про рост стоимости сырья, а другой про рост стоимости оборудования)

Задача 3. *Находим цены одних активов через цены других* *(12 баллов)*

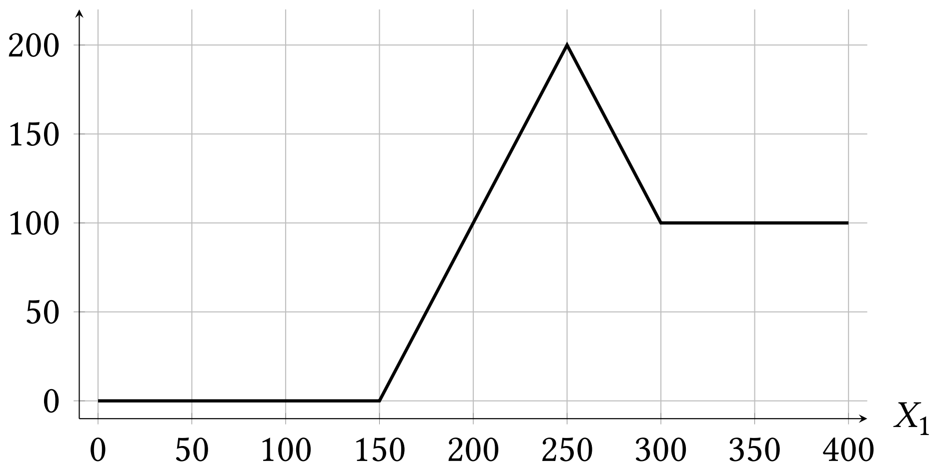
На фондовом рынке торгуется акция компании X, которая в ближайшие несколько лет не будет платить дивиденды. Цена акции в текущий момент равна $X_0 = 220$. Кроме того, торгуются безрисковые, бескупонные облигации со сроком погашения через год и номиналом 22. Доходность по ним равна 10 % годовых.

Цену акции через 1 год обозначим за X_1 (в текущий момент она неизвестна, и ваши ответы не могут от нее зависеть). Известно, что на рынке отсутствуют возможности для арбитража, откуда следует, что портфели активов, приносящие одинаковый поток доходов через год при каждом X_1, сегодня должны стоить одинаково. Для решения задачи записывайте, как будущий доход от того или иного контракта (возможно, отрицательный) зависит от X_1. Все цены контрактов, которые нужно найти в задаче, — это цены в текущий момент.

а) *(4 балла)* Если инвестор A купит у инвестора B финансовый контракт 1, то он будет *обязан* купить у инвестора B одну акцию компании X через 1 год по цене 220. Найдите цену контракта 1.

б) *(4 балла)* Контракт 2 дает своему владельцу *право* купить одну акцию компании X через 1 период по цене 220. Контракт 3 дает своему владельцу право продать одну акцию компании X через 1 год по цене 220. Найдите цену контракта 3, если цена контракта 2 в текущий момент равна 30. *Подсказка:* вам может помочь результат п. **а)**.

в) *(4 балла)* Теперь рассмотрим экзотический контракт 4, доход от которого зависит от будущей цены акции X_1 так, как показано на графике:



Кроме того, известны цены других контрактов, которые дают право на покупку или продажу 1 акции компании X через год по определенным ценам:

Контракт	Дает право на:	По цене:	Цена контракта:
5	покупку	150	80
6	покупку	250	10
7	продажу	250	190/11
8	покупку	300	1

Найдите цену контракта 4.

Решение

Будем обозначать цену контракта i за p_i.

а) Контракт 1 принесет инвестору случайную величину $X_1 - 220$ через год. Рассмотрим два портфеля.

1. Портфель 1 состоит из 1 акции компании X. Поток доходов от этого портфеля через год равен X_1.
2. Портфель 2 состоит из контракта 1 и 10 облигаций. Поток доходов от этого портфеля равен $(X_1 - 220) + 10 \cdot 22 = X_1$.

Таким образом, потоки доходов от этих двух портфелей совпадают. Значит, сегодня портфели должны стоить одинаково.

Стоимость портфеля 1 сегодня равна 220. Стоимость портфеля 2 равна $p_1 + 10 \cdot 22/(1+r) = p_1 + 200$. Значит, $220 = p_1 + 200$, откуда $p_1 = 20$.

б) Контракт 2 принесет через год $\max(X_1 - 220{,}0)$. Контракт 3 принесет $\max(220 - X_1{,}0)$. Снова рассмотрим два портфеля.

3. Портфель 3 состоит из контракта 2. Поток доходов от этого портфеля равен $\max(X_1 - 220{,}0)$.
4. Портфель 4 состоит из контракта 1 и контракта 3. Поток доходов от этого портфеля равен $(X_1 - 220) + \max(220 - X_1{,}0) = \max(X_1 - 220{,}0)$.

Таким образом, потоки доходов от этих двух портфелей совпадают. Значит, сегодня портфели должны стоить одинаково.

Стоимость портфеля 3 сегодня равна 30. Стоимость портфеля 2 равна $p_1 + p_3 = 20 + p_3$. Отсюда $p_3 = 10$.

в) Доход контракта 4 (из графика):

$$f_1(X_1) = \begin{cases} 0, & X_1 \leqslant 150, \\ 2(X_1 - 150), & 150 < X_1 \leqslant 250, \\ 2(350 - X_1), & 250 < X_1 \leqslant 300, \\ 100, & 300 > X_1. \end{cases}$$

Найдем, какой набор контрактов 5, 6, 7, 8 принесет такой же доход через год, что и контракт 4. Пусть купили a контрактов 5, b контрактов 6, c контрактов 7, d контрактов 8. Найдем такие a, b, c, d, при которых при любых значениях X_1 доход от портфеля из контрактов 5,6,7,8 будет равен доходам, приведенных на графике в условии задачи.

Запишем доходы от контрактов 5, 6, 7, 8:

Доход от контракта 5 $\max(X_1 - 150{,}0)$, доход от контракта 6 $\max(X_1 - 250{,}0)$, доход от контракта 7 $\max(250 - X_1{,}0)$, доход от контракта 8 $\max(X_1 - 300{,}0)$.

$$f_2(X_1) = \begin{cases} c(250 - X_1), & X_1 \leqslant 150, \\ a(X_1 - 150) + c(250 - X_1), & 150 < X_1 \leqslant 250, \\ a(X_1 - 150) + b(X_1 - 250), & 250 < X_1 \leqslant 300, \\ a(X_1 - 150) + b(X_1 - 250) + d(X_1 - 300), & 300 > X_1. \end{cases}$$

Так как при всех X_1 потоки через год должны быть равны ($f_1(X_1) = f_2(X_1)$), получаем:

$$\begin{cases} c(250 - X_1) = 0, & X_1 \leqslant 150, \\ a(X_1 - 150) + c(250 - X_1) = 2(X_1 - 150), & 150 < X_1 \leqslant 250, \\ a(X_1 - 150) + b(X_1 - 250) = 2(350 - X_1), & 250 < X_1 \leqslant 300, \\ a(X_1 - 150) + b(X_1 - 250) + d(X_1 - 300) = 100, & 300 > X_1. \end{cases}$$

Отсюда $a = 2$, $b = -4$, $c = 0$, $d = 2$. При отсутствии арбитража цены таких активов должны быть равны. А значит, цена контракта 4 равна $80a + 10b + 190c/11 + d = 2 \cdot 80 - 4 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = 122$.

Данное решение использует отрицательное количество одного из контрактов (короткие продажи), но можно обойтись и без них. Действительно, портфель, состоящий из контракта 4 и четырех контрактов 6, приносит всегда столько же, сколько портфель, состоящий из двух единиц контракта 5 и двух единиц контракта 8. Отсюда можно найти p_4.

Схема проверки

Если все решение участника основывалось на предпосылке о том, что цена по контракту выплачивается через год, баллы не снижались (при условии того, что все остальное верно).

Если решение верное, но формулы, требуемые в критериях, не были выведены явно, баллы за соответствующие критерии ставились.

а) Всего за пункт — **4 балла**, из них:

К1. Определение будущего дохода по контракту 1: ($X_1 - 220$) — **1 балл**.

К2. Составление двух портфелей, приносящих один и тот же доход в будущем при каждом X_1 — **2 балла**.
- Если в работе находилось конкретное X_1, ставилось **0 баллов**.
- Если в работе утверждалось, что NPV контракта должна быть равна 0 (без учета неопределенности X_1), ставилось **0 баллов**.
- Если приравнивались NPV контракта 1 и NPV акции без явного уточнения что через год у обладателя контракта на руках будет одна акция, ставился **1 балл**. При наличии такого уточнения ставилось **2 балла**.
- Если приравнивались матожидания доходностей или NPV по контракту и по акции, ставилось **2 балла**.
- За идею о репликации контракта 1 с помощью акций и облигаций при отсутствии верной процедуры репликации ставился **1 балл**. При успешной репликации ставилось **2 балла**.

К3. Нахождение p_1 из верных соображений, соответствующих критерию 2, — **1 балл**. При нахождении верного p_1 из других соображений, балл не ставился.

б) Всего за пункт — **4 балла**, из них:

К4. Определение дохода по контракту 2 ($\max\{X_1 - 220{,}0\}$) — **1 балл**.

К5. Определение дохода по контракту 3 ($\max\{220 - X_1{,}0\}$) — **1 балл**.

К6. Составление двух портфелей, приносящих один и тот же доход в будущем при каждом X_1 — **1 балл**.
- Если в работе находилось конкретное X_1, ставилось **0 баллов**.
- Если приравнивались NPV контрактов 2 и 3 отдельно для случаев $X_1 > 220$ и $X_1 < 220$, ставилось **0 баллов**.
- Если приравнивались матожидания доходностей или NPV по контракту и по акции, ставился **1 балл**.

К7. Нахождение p_3 — **1 балл**.

в) Всего за пункт — **4 балла**, из них:

К8. Идея репликации одного контракта другими – **1 балл**

К9. Определение того, как доход по контракту 4 выражается через доходы контрактов 5, 6 и 8 — **2 балла**.

К10. Нахождение p_3 — **1 балл**.

Задача 4. *О пользе конкуренции* *(12 баллов)*

Как конкуренция на рынке влияет на стимулы фирм к инновациям? Данный вопрос является одним из классических в экономической науке. В этой задаче мы рассмотрим модель, проливающую на него свет.

На рынке пряжи для вязания действует фирма-монополист «Анна». Обратная функция спроса задана уравнением $p = 1 - q$, предельные издержки производства постоянны и изначально равны 0,5. «Анна» может снизить предельные издержки производства, осуществляя инновации. Чтобы снизить предельные издержки на $I \leqslant 0{,}5$, нужно понести дополнительные издержки в размере $0{,}5kI^2$ на инновационную деятельность, где $k > 1$. Других издержек, кроме издержек на производство и инновации, фирма на несет.

а) *(2 балла)* Выведите общие издержки «Анны» на производство и инновации как функцию только от q. *Подсказка:* проминимизируйте издержки «Анны» по I при произвольно выбранном q.

б) *(2 балла)* Найдите оптимальный объем выпуска $q^\star$ и инноваций $I^\star$ «Анны» в зависимости от k.

в) *(6 баллов)* Представим, что до того, как «Анна» осуществила инновации, на горизонте замаячила другая фирма — «Белла», потенциальный конкурент «Анны». Ее предельные издержки постоянны и равны 0,5. Снизить их она не может. Взаимодействие фирм устроено следующим образом.

1. «Анна» выбирает объем выпуска q_A и инноваций I.

2. Пронаблюдав выбор «Анны», «Белла» решает, зайти на рынок, или нет. Если она входит, то затем выбирает объем $q_B > 0$, а если не входит, то $q_B = 0$. Издержки входа на рынок равны 0.

3. На рынке устанавливается цена по правилу $p = 1 - q_A - q_B$, фирмы продают произведенную продукцию и получают соответствующую прибыль, взаимодействие заканчивается.

Определите значения $q_A^\star$, $I^\star$ и $q_B^\star$, которые выберут фирмы в зависимости от k.

г) *(1 балл)* В каком из пунктов — **б)** или **в)** — «Анна» больше вкладывается в инновации?

д) *(1 балл)* Вы — исследователь некоторого рынка, и видите что на нем действует лишь одна фирма. Всегда ли верно, что выпуск этой фирмы равен ее монопольному выпуску? Почему? Ваш ответ должен быть основан на контексте задачи.

Решение

а) Издержки «Анны» в зависимости от q и I имеют следующий вид:

$$(0{,}5 - I)\,q + 0{,}5kI^2 = 0{,}5q + \left(0{,}5kI^2 - qI\right)$$

Это парабола ветвями вверх относительно I, минимум лежит в вершине, если она доступна, или в точке $I = 0{,}5$ в противном случае.

$$I = \begin{cases} \frac{q}{k}, & \frac{q}{k} \leqslant 0{,}5 \\ 0{,}5, & \frac{q}{k} \geqslant 0{,}5 \end{cases}$$

Подставим найденную зависимость в исходную функцию издержек:

$$TC = \begin{cases} 0{,}5q - \frac{1}{2k}q^2, & \frac{q}{k} \leqslant 0{,}5 \\ 0{,}125k, & \frac{q}{k} \geqslant 0{,}5 \end{cases}$$

б) Заметим, что при фиксированном q для максимизации прибыли «Анна» должна выбирать такой уровень инноваций I, который минимизирует ее издержки. Поэтому, с учетом решения предыдущего пункта, мы можем записать функцию прибыли «Анны» только от q:

$$\pi = pq - TC = \begin{cases} (1-q)q - 0{,}5q + \frac{1}{2k}q^2, & \frac{q}{k} \leqslant 0{,}5 \\ (1-q)q - 0{,}125k, & \frac{q}{k} \geqslant 0{,}5 \end{cases} \Rightarrow \pi = \begin{cases} 0{,}5q - \left(1 - \frac{1}{2k}\right)q^2, & q \leqslant 0{,}5k \\ q - q^2 - 0{,}125k, & q \geqslant 0{,}5k \end{cases}$$

На обоих участках функция прибыли является квадратичной параболой с ветвями вниз. Оптимум на первом участке достигается в вершине соответствующей параболы: $q = \frac{k}{2(2k-1)}$. Вершина 0,5 на втором участке недоступна в силу $k > 1$, а потому оптимум достигается на границе: $q = 0{,}5k$. Но поскольку функция прибыли непрерывна, и граница $q = 0{,}5k$ является общей для обоих участков, а на первом участке мы выбираем другую точку, она не доставляет глобальный максимум прибыли. Стало быть, $q^\star = \frac{k}{2(2k-1)}$ и $I^\star = \frac{q^\star}{k} = \frac{1}{2(2k-1)}$.

в) Решим игру между «Анной» и «Беллой» с конца. Воспринимая q_A как заданную величину, «Белла» решает следующую задачу:

$$\pi_B = pq_B - TC_B = (1 - q_A - q_B)q_B - 0{,}5q_B = (0{,}5 - q_A)\,q_B - q_B^2 \to \max$$

Эта функция — парабола ветвями вниз относительно q_B при фиксированном q_A, а потому ее максимум лежит либо в вершине, если она доступна, либо в нуле:

$$q_B = \begin{cases} \frac{0{,}5 - q_A}{2}, & q_A \leqslant 0{,}5 \\ 0, & q_A \geqslant 0{,}5 \end{cases}$$

Зная это и пользуясь тем фактом, что $k > 1$, можем записать функцию прибыли «Анны».

$$\pi_A = pq_A - TC_A = (1 - q_A - q_B)q_A - TC_A \to \max$$

$$\pi_A = \begin{cases} \left(1 - q_A - \frac{0{,}5 - q_A}{2}\right)q_A - 0{,}5q_A + \frac{1}{2k}q_A^2, & q_A \leqslant 0{,}5 \\ (1 - q_A)\,q_A - 0{,}5q_A + \frac{1}{2k}q_A^2, & 0{,}5 \leqslant q_A \leqslant 0{,}5k \\ (1 - q_A)\,q_A - 0{,}125k, & q_A \geqslant 0{,}5k \end{cases} \to \max$$

$$\pi_A = \begin{cases} 0{,}25q_A - \left(0{,}5 - \frac{1}{2k}\right) q_A^2, & q_A \leqslant 0{,}5 \\ 0{,}5q_A - \left(1 - \frac{1}{2k}\right) q_A^2, & 0{,}5 \leqslant q_A \leqslant 0{,}5k \to \max \\ q_A - q_A^2 - 0{,}125k, & q_A \geqslant 0{,}5k \end{cases}$$

Эта функция — прибыль «Анны» как фирмы-монополиста с поправкой на появление нового участка при $q_A \leqslant 0{,}5$. Пользуясь рассуждениями из пункта **а)** можно откинуть анализ третьего участка — оптимум будет достигаться либо на первом, либо на втором, на каждом из которых функция ведет себя как парабола ветвями вниз.

В зависимости от k оптимум на первом участке достигается в точке

$$q_A = \begin{cases} \frac{k}{4(k-1)}, & \frac{k}{4(k-1)} \leqslant 0{,}5 \\ 0{,}5, & \frac{k}{4(k-1)} \geqslant 0{,}5 \end{cases} \Rightarrow q_A = \begin{cases} 0{,}5, & k \leqslant 2 \\ \frac{k}{4(k-1)}, & k \geqslant 2 \end{cases}$$

На втором же участке

$$q_A = \begin{cases} 0{,}5, & \frac{k}{2(2k-1)} \leqslant 0{,}5 \\ \frac{k}{2(2k-1)}, & \frac{k}{2(2k-1)} \geqslant 0{,}5 \end{cases} \Rightarrow q_A = \begin{cases} \frac{k}{2(2k-1)}, & k \leqslant 1 \\ 0{,}5, & k \geqslant 1 \end{cases}$$

Однако по условию $k > 1$, поэтому оптимум на втором участке всегда лежит на границе. Значит, оптимум всей функции совпадает с оптимумом на первом участке, поскольку если оптимум первого участка лежит на границе, оба оптимума совпадают, а если точка оптимума на первом участке является внутренней, то значение функции прибыли в ней больше, чем на границе.

$$q_A^\star = \begin{cases} 0{,}5, & k \leqslant 2 \\ \frac{k}{4(k-1)}, & k \geqslant 2 \end{cases}$$

$$I^\star = \frac{q_A^\star}{k} = \begin{cases} \frac{1}{2k}, & k \leqslant 2 \\ \frac{1}{4(k-1)}, & k \geqslant 2 \end{cases}$$

$$q_B^\star = \frac{0{,}5 - q_A^\star}{2} = \begin{cases} 0, & k \leqslant 2 \\ \frac{0{,}5 - \frac{k}{4(k-1)}}{2}, & k \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k \leqslant 2 \\ \frac{k-2}{8(k-1)}, & k \geqslant 2 \end{cases}$$

г) Заметим, что при $k > 1$ верно, что $2(2k-1) > 2k$ и $2(2k-1) > 4(k-1)$, поэтому объем инноваций в случае монополизации рынка (пункт **б)**) всегда меньше, чем при наличии конкуренции (пункт **в)**):

$$I^\star_{\text{монополия}} = \frac{1}{2(2k-1)} < \begin{cases} \frac{1}{2k}, & k \leqslant 2 \\ \frac{1}{4(k-1)}, & k \geqslant 2 \end{cases} = I^\star_{\text{конкуренция}}$$

д) Как видно из решения пункта **в)**, при малых предельных издержках инноваций ($1 < k \leqslant 2$) «Анна» полностью вытесняет «Беллу» ($q_B = 0$), выбирая выпуск больше монопольного:

$$q^{\star}_{\text{монополия}} = \frac{k}{2(2k-1)} < 0{,}5 = q^{\star}_{\text{конкуренция}}$$

Стало быть, если только у одной из фирм выпуск положителен, то он может не быть равен ее монопольному выпуску, коль скоро он выбран «с запасом» из соображений вытеснения конкурентов с рынка.

Примечание 1: Нобелевский лауреат 1972 года по экономике Кеннет Эрроу впервые описал эффект увеличения объема инноваций при конкуренции в сравнении с монополией, ныне известный как «эффект возмещения Эрроу». В данной задаче была произведена попытка в рамках простой модели продемонстрировать этот эффект.

Примечание 2: Описанную в задаче ситуацию можно интерпретировать следующим образом:

1) при малых значениях предельных издержек инноваций лидер может вытеснить последователя с рынка, вложив в инновационную деятельность небольшое количество денег;

2) с ростом k стимулы к более дорогим инновациям уменьшаются, что выливается в снижение $q^{\star}_A$ и $I^{\star}$;

3) после некоторого порога для k ($k = 2$) лидеру становится непозволительно дорого вытеснять последователя с рынка, поэтому объем инноваций, а за ним и объем произведенной лидером продукции снижается настолько, что последователь выходит на рынок и производит тем больше, чем дороже для лидера процесс инноваций.

Схема проверки

За каждую арифметическую ошибку снимается от **1 балла** в зависимости от ее серьезности и влияния на дальнейшее решение. За нерассмотрение достаточных условий оптимизации баллы **не снимаются**. Баллы в пунктах **б)** и **в)** при нерассмотрении участков функций при $q > 0{,}5k$ **не снимаются**.

а) 2 балла за пункт:

K1 Найдена зависимость $TC = 0{,}5q - \frac{1}{2k}q^2$ при $q \leqslant 0{,}5k$ - **1 балл**.

K2 Найдена зависимость $TC = 0{,}125k$ при $q > 0{,}5k$ - **1 балл**.

б) 2 балла за пункт:

K3 Выписана функция прибыли «Анны» $\pi_A = 0{,}5q - \left(1 - \frac{1}{2k}\right)q^2$ - **1 балл**.

K4 Найдены значения $q^{\star} = \frac{k}{2(2k-1)}$ и $I^{\star} = \frac{1}{2(2k-1)}$ - **1 балл**.

в) 6 баллов за пункт:

K5 Найдено оптимальное значение $q_B = \frac{0{,}5-q_A}{2}$ при фиксированном q_A - **1 балл**.

K6 Выписана функция прибыли «Анны» только от q_A: $\pi_A = 0{,}25q_A - \left(0{,}5 - \frac{1}{2k}\right)q_A^2$ - **1 балл**.

K7 Найдена вершина параболы $q^{\star}_A = \frac{k}{4(k-1)}$ - **1 балл**.

K8 Продемонстрировано, что если точка вершины параболы больше 0,5, то $q^{\star}_A = \frac{1}{2}$ - **1 балл**.

K9 Найдены значения $I^{\star} = \frac{1}{2k}$ и $q^{\star}_B = 0$ при $k \leqslant 2$ - **1 балл**.

К10 Найдены значения $I^\star = \frac{1}{4(k-1)}$ и $q_B^\star = \frac{k-2}{8(k-1)}$ при $k > 2$ - **1 балл**.

г) 1 балл за пункт:

К11 Произведено сравнение корректных значений инноваций «Анны» в случае монополии и конкуренции при различных k и указано, что в пункте **в)** «Анна» больше вкладывается в инновации - **1 балл**.

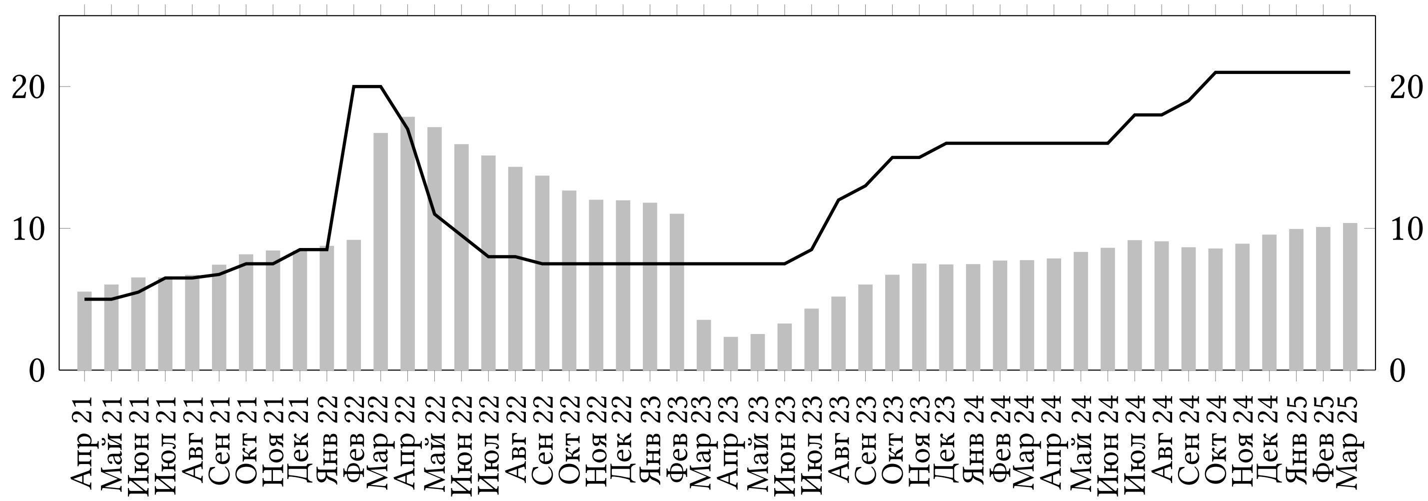
д) 1 балл за пункт:

К12 Приведено обоснование отличия выпуска от монопольного, связанное со стимулами к вытеснению конкурентов - **1 балл**.

Второй тур

Задача 5. *Канал издержек денежно-кредитной политики* (12 баллов)

Сегодня, 25 апреля 2025 года (скорее всего, прямо в тот момент, когда вы пишете работу), проходит очередное заседание Совета директоров Банка России по ключевой ставке. После обеда будет объявлено решение, а пока рассмотрим график, показывающий значения инфляции в России *год к году* и ключевой ставки до текущего момента[2]:



Между инфляцией и ключевой ставкой на графике явно положительная корреляция. Одно из возможных объяснений — так называемый *канал издержек денежно-кредитной политики*, суть которого состоит в том, что ключевая ставка влияет на процентные платежи фирм по кредитам. По данным Банка России, медианное соотношение процентных расходов и себестоимости продаж российских компаний нефинансового сектора составляет около 1 %, среднее — около 3 %.

а) *(2 балла)* В соответствии с классическими трансмиссионными механизмами денежно-кредитной политики, повышение ключевой ставки должно снижать инфляцию, а не повышать. Объясните какой-либо из этих механизмов. Проиллюстрируйте его на графике AD-AS.

б) *(2 балла)* Покажите на новом графике AD-AS, как из-за действия канала издержек повышение ключевой ставки может приводить к инфляции.

в) *(5 баллов)* Исследования на данных показывают, что на самом деле эффект канала издержек довольно мал, а эффекты, описанные в классических трансмиссионных механизмах, его перевешивают. Приведите два аргумента, почему это может быть так. Если ваши аргументы работают только при каких-то существенных предпосылках или имеют другие ограничения (контраргументы), укажите их и объясните.

г) *(2 балла)* Если канал издержек в силу малости своего эффекта не может объяснить наблюдаемую положительную корреляцию между процентной ставкой и инфляцией, то что может? Приведите одно альтернативное объяснение.

д) *(1 балл)* На графике видно резкое снижение инфляции в марте 2023 г. (более чем в 3 раза по сравнению с февралем), хотя ставка тогда не менялась, а в экономике Рос-

[2]Источник: https://www.cbr.ru/hd_base/infl/

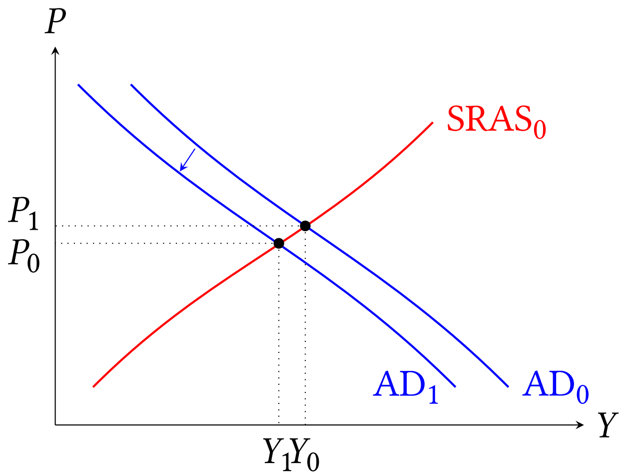
сии не происходило никаких событий, которые могли бы объяснить такое замедление роста цен. Объясните, почему мы видим резкое снижение инфляции на графике.

Решение

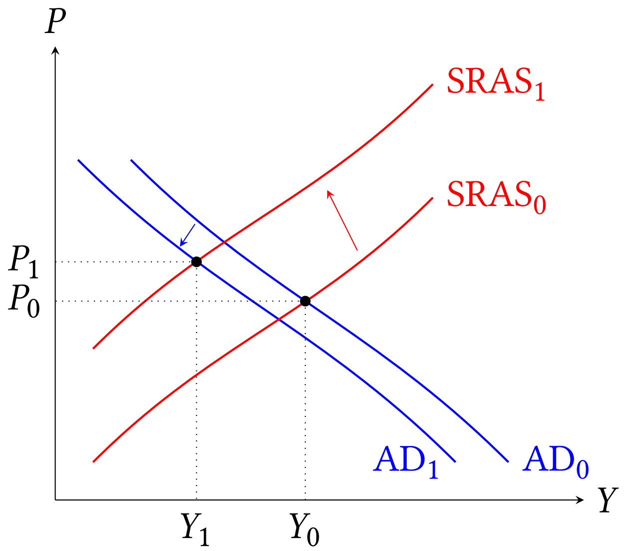
а) Согласно классическим трансмиссионным механизмам ДКП, повышение ключевой ставки снижает инфляцию через следующие каналы:

- **Стоимость заимствований.** Повышение ключевой ставки приводит к удорожанию заимствований как для бизнеса, так и для домохозяйств. Это снижает потребительские и инвестиционные расходы, что уменьшает совокупный спрос (AD) и, следовательно, замедляет рост цен.
- **Обменный курс.** Повышение ставки делает финансовые активы в национальной валюте более привлекательными для инвесторов, укрепляя курс рубля. Укрепление валюты снижает цены на импорт, что также способствует снижению инфляции.

На графике AD-AS это иллюстрируется сдвигом кривой AD вниз, что приводит к снижению уровня цен.



б) На графике AD-AS канал издержек можно отразить следующим образом: повышение ключевой ставки увеличивает процентные издержки компаний, что ведет к росту издержек и, как следствие, к сдвигу кривой совокупного предложения (AS) вверх. Если сдвиг AS сильнее, чем соответствующий сдвиг AD (см. пункт **а)**), то цены в равновесии вырастут.



в) Возможные причины:

- **Низкая доля процентных издержек (1–3 %).** Это означает, что даже значительное изменение ставки оказывает ограниченное влияние на издержки и цены.
  - **Контраргумент:** при росте ставок не только кредитование становится дороже, но и вложение в депозиты — выгоднее. По этой причине даже компании с низкими *явными* процентными расходами ощутят рост ставок через *неявные (альтернативные)* процентные издержки: выгоднее будет оставить деньги на депозите, чем инвестировать.
- **Наличие долгосрочных контрактов.** Многие компании финансируются по ранее заключенным договорам с фиксированной процентной ставкой (кредитным линиям), и рост ключевой ставки влияет на них с лагом или вовсе не влияет.
- **Ожидание снижения ставки.** Рост процентных ставок до пиковых значений обычно имеет относительно краткосрочный характер (до двух лет). Бизнес принимает решения на более длинном горизонте планирования, и если ожидается падение процентных ставок в будущем, он заложит это в NPV проектов, и NPV может остаться положительной, несмотря на краткосрочный рост ставок. В итоге фирмы не переключатся с вложений в производство на вложения в депозиты, и краткосрочный рост ставок слабо повлияет на совокупное предложение.

г) Другие две связанные причины, по которым мы наблюдаем положительную корреляцию — это "лаг денежно-кредитной политики"и "неожиданные шоки". На неожиданные шоки (например, неожиданное введение новой льготной ипотечной программы) приходится реагировать «в моменте», в то время как временной лаг ДКП приводит к отсроченному воздействию предпринятых мер. В результате в данных мы наблюдаем сначала неожиданное воздействие новых инфляционных факторов, а только потом отсроченный корректирующий эффект ДКП. Промежуток времени, в течение которого действуют новые (дез)инфляционные факторы и еще не проявляется эффект от изменения ДКП дает положительную корреляцию. Сейчас лаг воздействия мер ДКП около 6 месяцев

д) Показатель инфляции год к году отражает рост цен за последние 12 месяцев. Резкое снижение инфляции в марте 2023 года можно объяснить эффектом базы.

В марте 2022 года инфляция резко вырос уровень цен, из-за чего мы увидели всплеск инфляции. Поскольку инфляция рассчитывается как отношение уровня цен год к году, то цены марта 2023 года сравниваются с очень высоким уровнем цен марта 2022 года. Из-за этого мы видим резкое падение инфляции именно в марте 2023.

Схема проверки

а) 2 балла, из них:

+1 верное описание любого официального канала трансмиссии денежно-кредитной политики: процентный, валютный, балансовый, кредитный и др.;

+1 корректный график с подписанными осями.

б) 2 балла, из них:

+1 сдвиг кривой (SR)AS на графике;

+1 на графике также показан сдвиг AD вниз, результирующий эффект на цены — рост.

в) 5 баллов, из них по 2 балла за максимум 2 корректных аргумента (проверяются две первых), 1 балл — если хотя бы в одном из аргументов корректно указано ограничение/предпосылка/контраргумент.

г) 2 балла, из них:

+1 объяснение реакции ставки на инфляцию, или инфляционные ожидания, или третий фактор;

+1 сделана оговорка про лаг или снижение эффекта.

д) 1 балл за верное объяснение особенности подсчета инфляции на графике (формула «год к году»).

Задача 6. *Буквально вертикальная интеграция* *(12 баллов)*

Восхождение на Пик Ленина состоит из нескольких этапов. Сначала из базового лагеря нужно подняться в первый лагерь, а затем из первого во второй. Из второго лагеря можно предпринять попытку штурма вершины. Спортивные альпинисты проходят весь этот путь самостоятельно, транспортируя все необходимое снаряжение и продукты на себе. Однако менее профессиональные восходители могут воспользоваться услугами носильщиков, которые готовы за умеренную плату доставлять палатки и другое необходимое оборудование из лагеря в лагерь.

Спрос на услуги носильщиков, транспортирующих грузы из базового лагеря в первый, имеет вид: $q_1 = 110 - p_1$, где p_1 — цена транспортировки одного центнера грузов, q_1 — количество центнеров груза, транспортируемое из базового лагеря в первый. Спрос на услуги носильщиков, транспортирующих грузы из первого лагеря во второй, имеет вид: $q_2 = q_1 - p_2$. Предельные издержки транспортировки одного центнера грузов из базового лагеря в первый постоянны и равны 10. Предельные издержки транспортировки одного центнера грузов из первого лагеря во второй постоянны и равны 20. Считайте, что постоянные издержки транспортировки во всех случаях отсутствуют.

а) *(6 баллов)* Найдите объемы транспортировки грузов между каждой соседней парой лагерей для следующих ситуаций:

1. Рынки транспортировки грузов между любой соседней парой лагерей являются совершенно конкурентными.
2. Все носильщики, транспортирующие грузы из базового лагеря в первый, объединились в компанию «База»; все носильщики, транспортирующие грузы из первого лагеря во второй, объединились в компанию «Штурм». Каждая компания является монополистом на своём участке маршрута и максимизирует свою прибыль, не думая о другой компании. Сначала объем выбирает «База», затем «Штурм».
3. Все носильщики объединились и образовали вертикально интегрированный холдинг «Вершина». Компания максимизирует прибыль от транспортировки грузов между всеми лагерями.

б) *(3 балла)* Рассчитайте суммарное общественное благосостояние для каждой из трех ситуаций выше. В какой из этих ситуаций суммарное общественное благосостояние выше, чем в двух других?

в) *(1 балл)* Может ли государство увеличить благосостояние по сравнению с лучшей из трех ситуаций выше, вводя налоги или субсидии? Почему? Ответьте без расчетов, приведя содержательное экономическое объяснение.

г) *(2 балла)* Рассмотрим случай 2 из пункта **а)**. Предположим, что вы владелец компании «База». Коллеги из компании «Штурм» предлагают вам организовать вертикально интегрированный холдинг «Вершина» и всю полученную холдингом прибыль делить поровну. Следует ли вам соглашаться? Если нет, то можете ли вы предложить пример такого дележа суммарной прибыли холдинга, чтобы в интеграции были заинтересованы и вы, и владельцы компании «Штурм»?

Решение

а) Рассмотрим три случая.

1. *Совершенная конкуренция (СК):*
   На каждом рынке в совершенно конкурентном равновесии выполнено соотношение $p = MC$.

$$p_1 = 10 \implies q_1 = 110 - 10 = \boxed{100}, \qquad p_2 = 20 \implies q_2 = q_1 - p_2 = 100 - 20 = \boxed{80}.$$

2. *Две независимые монополии:*
   Заметим, что решение, принятое «Штурмом», никак не влияет на оптимальный выбор «Базы».

$$\pi_1 = (p_1 - MC_1)q_1 = (110 - q_1 - 10)q_1 = (100 - q_1)q_1$$

Это парабола ветвями вниз, ее максимум лежит в вершине:

$$q_1^\star = \frac{100}{2} = \boxed{50}$$

«Штурм», обладая полной информацией, понимает, что $q_1 = 50$.

$$\pi_2 = (p_2 - MC_2)q_2 = (50 - q_2 - 20)q_2 = (30 - q_2)q_2$$

Это парабола ветвями вниз, ее максимум лежит в вершине:

$$q_2^\star = \frac{30}{2} = \boxed{15}$$

3. *Вертикально интегрированный холдинг:*
   Совместная прибыль имеет вид

$$\Pi = (100 - q_1)q_1 + (q_1 - q_2 - 20)q_2 = -q_2^2 + (q_1 - 20)q_2 + 100q_1 - q_1^2$$

При каждом фиксированном q_1 это парабола ветвями вниз относительно q_2, ее максимум лежит в вершине, если она доступна, и в нуле в противном случае:

$$q_2^\star = \begin{cases} 0, & q_1 \leqslant 20 \\ \frac{q_1 - 20}{2}, & q_1 \geqslant 20 \end{cases}$$

Можем подставить эту зависимость обратно в функцию прибыли и свести задачу оптимизации к максимизации функции одной переменной.

$$\Pi = \begin{cases} 100q_1 - q_1^2, & q_1 \leqslant 20 \\ \frac{(q_1-20)^2}{4} + 100q_1 - q_1^2, & q_1 \geqslant 20 \end{cases} = \begin{cases} 100q_1 - q_1^2, & q_1 \leqslant 20 \\ -\frac{3}{4}q_1^2 + 90q_1 + 100 & q_1 \geqslant 20 \end{cases}$$

На каждом из участков график этой функции — парабола ветвями вниз, а значит оптимум на каждом участке достигается в вершине соответствующей параболы, если она доступна, и на границе в противном случае.

На первом участке вершина недоступна, поэтому оптимум достигается при $q_1 = 20$. На втором участке вершина $q_1 = \frac{90}{6/4} = 60$ доступна. Значит, в силу непрерывности функции прибыли, оптимум всей функции достигается при $q_1^\star = \boxed{60}$ и $q_2^\star = \frac{q_1^\star - 20}{2} = \boxed{20}$.

б) Заметим, что верны следующие соотношения:

$$CS_1 = \frac{q_1^2}{2}, \qquad CS_2 = \frac{q_2^2}{2}, \qquad SW = CS_1 + CS_2 + \Pi - S.$$

Здесь CS_i — излишек потребителя на i-ом рынке, Π — суммарная прибыль всех фирм на рынке, S — суммарный объем выданной государством субсидии (это число отрицательно в случае введения налога, а в данном пункте равно 0, поскольку государство не вмешивается в рынок), SW — общественное благосостояние.

Сценарий	q_1	q_2	CS_1	CS_2	Π	SW
1. СК	100	80	5 000	3 200	0	**8 200**
2. Монополии	50	15	1 250	112.5	2725	4 087,5
3. Холдинг	60	20	1 800	200	2800	4 800

Наибольшее SW из трёх сценариев даёт совершенная конкуренция.

в) Да, может. Первый рынок создаёт положительный внешний эффект — *экстерналию*: каждый дополнительный центнер, доставленный в первый лагерь, увеличивает потенциальный спрос на втором участке, но совершенно-конкурентные носильщики этого не учитывают. Субсидия от государства, введенная для носильщиков на первом рынке, увеличит объем положительной экстерналии и приведет к росту общественного благосостояния.

г) В сценарии 2:

$$\pi_{\text{База}} = 2\,500, \qquad \pi_{\text{Штурм}} = 225.$$

После интеграции (сценарий 3) общая прибыль $\Pi = 2\,800$. Равный делёж ($1\,400 : 1\,400$) ухудшает положение «Базы» ($1\,400 < 2\,500$), поэтому *соглашаться невыгодно.*

Для взаимной выгоды необходимо

$$\pi_{\text{База}} \geqslant 2\,500, \qquad \pi_{\text{Штурм}} \geqslant 225, \qquad \pi_{\text{База}} + \pi_{\text{Штурм}} = 2\,800.$$

Любое распределение, например

$$\pi_{\text{База}} = 2\,525, \quad \pi_{\text{Штурм}} = 275.$$

даёт обеим компаниям положительный прирост в прибыли и делает интеграцию привлекательной.

Схема проверки

За каждую арифметическую ошибку снимается от **1 балла** в зависимости от ее серьезности и влияния на дальнейшее решение. За нерассмотрение достаточных условий оптимизации баллы **не снимаются**.

а)

K1 Совершенная конкуренция: $q_1 = 100$ — **1 балл**.

K2 Совершенная конкуренция: $q_2 = 80$ — **1 балл**.

K3 Две независимые монополии: $q_1 = 50$ — **1 балл**.

K4 Две независимые монополии: $q_2 = 15$ — **1 балл**.

K5 Интегрированный холдинг: $q_1 = 60$ — **1 балл**.

K6 Интегрированный холдинг: $q_2 = 20$ — **1 балл**.

б)

K7 Указание на формулу $SW = CS_1 + CS_2 + \Pi$ для расчета общественного благосостояния — **1 балл**.

K8 Верные значения $SW = \{8200;\ 4087{,}5;\ 4800\}$ для трёх сценариев — **1 балл**.

K9 Правильно выбран лучший сценарий (наибольшее SW при совершенной конкуренции) — **1 балл**.

в)

K10 Содержательное объяснение без расчетов о том, что субсидия на первом рынке может повысить SW благодаря положительной экстерналии — **1 балл**.

г)

K11 Показано, что равный делёж $1400 : 1400$ невыгоден «Базе» ($1400 < 2500$) — **1 балл**.

K12 Предложен конкретный пример распределения прибыли, выгодный обеим фирмам (например, $2525 : 275$) — **1 балл**.

Задача 7. *Неравенство: внутри и между* *(12 баллов)*

Экономисты интересуются вопросом неравенства доходов не только внутри одной страны, но и между странами. В 2024 г. Нобелевская премия по экономике как раз была присуждена за исследование причин неравенства между странами. Исследования показывают, что за последние 45 лет неравенство доходов внутри стран в среднем увеличилось, но неравенство между странами снизилось.

Представим себе две страны (первую и вторую), в которых есть по две группы населения, в каждой из которых доход распределен равномерно. Обозначим за x_i долю более бедной группы в населении страны i, за a_i — среднедушевой доход бедных в стране i, за b_i — среднедушевой доход богатых в стране i ($b_i \geqslant a_i \geqslant 0$, причем суммарный доход каждой страны положителен). Численность населения в двух странах одинакова.

Определим *средний внутристрановой коэффициент Джини* $G_{\text{внутри}}$ как среднее арифметическое коэффициентов Джини в двух странах. Определим *межстрановой коэффициент Джини* $G_{\text{между}}$ как коэффициент Джини, отражающий неравенство доходов в гипотетическом мире, в котором есть две страны с таким же населением и суммарным доходом в каждой из стран, но в котором доход внутри стран распределен равномерно. Наконец, пусть $G_{\text{мира}}$ — коэффициент Джини, отражающий полное неравенство доходов между всеми жителями двух стран.

а) *(4 балла)* Найдите $G_{\text{внутри}}$, $G_{\text{между}}$ и $G_{\text{мира}}$, если $x_1 = x_2 = 0{,}5$, $a_1 = 10$, $b_1 = 40$, $a_2 = 20$, $b_2 = 130$.

б) *(8 баллов)* Теперь допустим, что $x_1 = x_2 = 0{,}8$. Значения среднедушевых доходов a_i, b_i неизвестны. Найдите максимально возможное и минимально возможное значения $G_{\text{мира}}$, если $G_{\text{внутри}} = 0{,}2$, $G_{\text{между}} = 0{,}3$.

Решение

а) Пусть N — население каждой из стран.

Рассчитаем y_1 и y_2 — доли доходов бедных в суммарном доходе каждой из стран.

$$y_1 = \frac{10 \cdot 0{,}5N}{10 \cdot 0{,}5N + 40 \cdot 0{,}5N} = 0{,}2.$$

$$y_2 = \frac{20 \cdot 0{,}5N}{20 \cdot 0{,}5N + 130 \cdot 0{,}5N} = \frac{2}{15}.$$

Значит, коэффициенты Джини в двух странах равны $G_1 = x_1 - y_1 = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$, $G_2 = x_2 - y_2 = 0{,}5 - 2/15 = 11/30$.

Следовательно, средний внутристрановой коэффициент Джини равен

$$G_{\text{внутри}} = \frac{G_1 + G_2}{2} = \frac{\frac{3}{10} + \frac{11}{30}}{2} = \frac{1}{3}.$$

Среднедушевой доход ниже в стране 1, чем в стране 2 ($0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 40 < 0{,}5 \cdot 20 + 0{,}5 \cdot 130$), значит, страна 1 — более бедная «группа населения» в мире.

Доля страны 1 в мировом доходе составляет

$$\frac{10 \cdot 0{,}5N + 40 \cdot 0{,}5N}{10 \cdot 0{,}5N + 40 \cdot 0{,}5N + 20 \cdot 0{,}5N + 130 \cdot 0{,}5N} = \frac{50}{50+150} = 0{,}25.$$

Ее доля в мировом населении равна 0,5. Значит, межстрановой коэффициент Джини равен

$$G_{\text{между}} = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25.$$

Наконец, чтобы посчитать мировой коэффициент Джини, построим мировую кривую Лоренца. Она представляет из себя ломаную линию, соединяющую точки $(0;0)$, $(0{,}25;0{,}05)$, $(0{,}5;0{,}15)$, $(0{,}75;0{,}35)$, $(1;1)$.

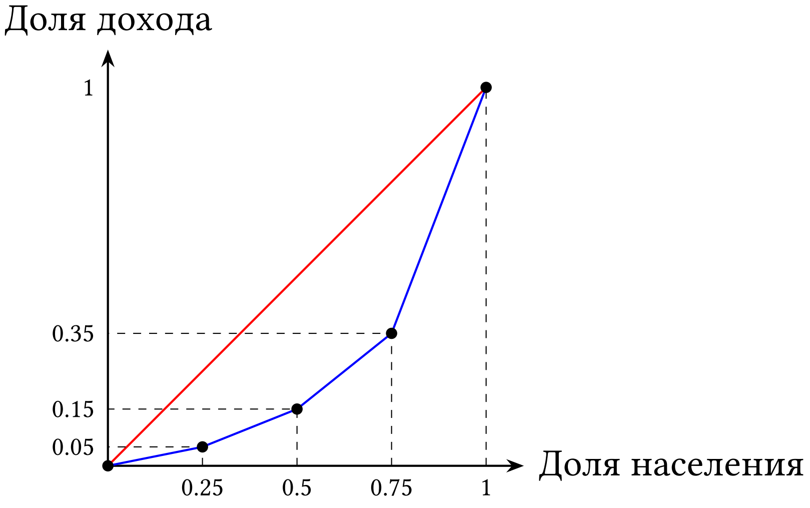


Рис. 7.1: Мировая кривая Лоренца для **п. а)**.

Отсюда находим, что площадь под ней равна $S = 0{,}2625$, а общемировой коэффициент Джини равен

$$G_{\text{мира}} = \frac{1/2 - S}{1/2} = 1 - 2S = 0{,}475.$$

Ответ: $G_{\text{внутри}} = 1/3$, $G_{\text{между}} = 1/4$, $G_{\text{мира}} = 0{,}475$.

б) Определим, как взаимно расположены среднедушевые доходы a_1, a_2, b_1, b_2.

Пусть Y_i — суммарный доход страны i. Не нарушая общности, можно считать, что $Y_1 \leqslant Y_2$. Тогда

$$G_{\text{между}} = 0{,}5 - \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} = 0{,}3,$$

откуда $Y_2/Y_1 = 4$.

Пусть y_i — доля дохода бедных в каждой стране в ее общем доходе. Тогда

$$G_{\text{внутри}} = \frac{1}{2}(x_1 - y_1 + x_2 - y_2) = \frac{1}{2}(1{,}6 - y_1 - y_2) = 0{,}2,$$

откуда

$$y_1 + y_2 = 1{,}2.$$

Имеем $b_1 = \frac{(1-y_1)Y_1}{(1-x_1)N}$, $a_2 = \frac{y_2Y_2}{x_2N}$. Покажем, что из имеющихся данных следует, что $b_1 < a_2$. Действительно,

$$b_1 < a_2 \Leftrightarrow \frac{(1-y_1)Y_1}{(1-x_1)N} < \frac{y_2Y_2}{x_2N} \Leftrightarrow 1-y_1 < y_2\frac{Y_2}{Y_1}\frac{1-x_1}{x_2} \Leftrightarrow 1-y_1 < y_2 \cdot 4 \cdot 0{,}2/0{,}8 \Leftrightarrow y_1+y_2 > 1,$$

но последнее верно в силу $y_1 + y_2 = 1{,}2$. Значит, $b_1 < a_2$, откуда

$$a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2.$$

Отсюда получаем, что кривая Лоренца мира соединяет точки $(0;0)$, $(0{,}4;0{,}2y_1)$, $(0{,}5;0{,}2)$, $(0{,}9;0{,}2+0{,}8y_2)$, $(1;1)$.

Удвоенная площадь под ней равна $2S = 0{,}1y_1 + 0{,}4y_2 + 0{,}3$, а коэффициент Джини $G_{\text{мира}} = 1 - 2S = 0{,}7 - 0{,}1y_1 - 0{,}4y_2$. Нам нужно максимизировать и минимизировать значение выражения $0{,}7 - 0{,}1y_1 - 0{,}4y_2$ при ограничениях $y_i \geqslant 0$, $y_i \leqslant 0{,}8$ (из-за неотрицательности коэффициентов Джини в двух странах), и $y_1 + y_2 = 1{,}2$. Выражаем $y_2 = 1{,}2 - y_1$, откуда

$$G_{\text{мира}} = 0{,}7 - 0{,}1y_1 - 0{,}4(1{,}2 - y_1) = 0{,}22 + 0{,}3y_1.$$

y_1 принимает значения от 0,4 (в силу $y_2 = 1{,}2 - y_1 \leqslant 0{,}8$) до 0,8. Для минимизации $G_{\text{мира}}$ нужно взять $y_1 = 0{,}4$, для максимизации $y_1 = 0{,}8$.

Значит,

$$\min G_{\text{мира}} = 0{,}22 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}34; \quad \max G_{\text{мира}} = 0{,}22 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}46.$$

Ответ: минимальное значение $G_{\text{мира}}$ равно 0,34, максимальное — 0,46.

Схема проверки

За каждую арифметическую ошибку снижался **1 балл**. Если по какому-либо критерию дается больше 1 балла, то эти баллы неделимы. Например, по критерию К5 нельзя получить 1 или 2 балла, только 0 или 3.

а) Всего за пункт **4 балла**, из них:

К1 Нахождение $G_{\text{внутри}}$ — **1 балл.**
К2 Нахождение $G_{\text{между}}$ — **1 балл.**
К3 Нахождение точек излома мировой кривой Лоренца — **1 балл.**
К4 Нахождение $G_{\text{мира}}$ — **1 балл.**

б) Всего за пункт **8 баллов**, из них:

К5 Доказательство того, что $b_1 < a_2$ — **3 балла**.
К6 Нахождение точек излома мировой кривой Лоренца в зависимости от y_i (или a_i, b_i) для верного случая $b_1 < a_2$ — **1 балл**.
К7 Нахождение верного минимального значения $G_{\text{мира}}$ с обоснованием — **2 балла**.
К8 Нахождение верного максимального значения $G_{\text{мира}}$ с обоснованием — **2 балла**.

Задача 8. *Оптимальная субсидия на основе данных* *(12 баллов)*

В жизни экономистам зачастую неизвестны функции спроса, предложения, полезности — всё то, что обычно дано в задачах по экономике. Для анализа рынков в реальности используются данные о ценах, объемах, числе фирм, характеристиках товаров и т. д. Здесь мы рассмотрим, как можно (и можно ли) извлечь информацию об оптимальной экономической политике непосредственно из данных о ценах и объемах.

Рассмотрим монополиста, средние издержки производства которого постоянны и равны c, а обратная функция спроса на товар описывается уравнением $P = a - bQ$, где $a > c > 0$, $b > 0$. Государство хотело бы выплачивать фирме потоварную субсидию за каждую проданную единицу товара так, чтобы выпуск фирмы вырос до уровня, соответствующего рынку совершенной конкуренции с таким же спросом и такими же издержками. Обозначим необходимую для этого ставку субсидии за $s^\star$.

а) *(2 балла)* Найдите $s^\star$ как функцию от параметров a, b и c.

б) *(4 балла)* Государство знает вид функций спроса и издержек, но не знает значений параметров a, b, c. Вместо этого оно наблюдает изначальный объем на рынке Q_0 (когда субсидии нет). Кроме того, в каждом следующем периоде $t = 1, 2, \ldots$ оно вводит субсидию по известной ему ставке $s_t > 0$ и наблюдает рыночный объем выпуска Q_t. Цены государство не наблюдает. Верно ли, что в конце некого периода $t = 0, 1, 2, \ldots$ у государства накопится достаточно данных, чтобы однозначно определить $s^\star$? Если да, то найдите минимальное $t \geqslant 0$, при котором это так (обозначьте его за $t^\star$), и приведите формулу, по которой государство может определить $s^\star$ как функцию от величин, известных в конце периода $t = t^\star$. Считайте, что ситуация, при которой выпуск фирмы равен максимальному уровню $Q_{\max} = a/b$, заведомо не возникает. Кроме того, фирма максимизирует прибыль в каждом периоде стандартным образом и не пытается, выбирая объем выпуска, стратегически повлиять на будущие ставки субсидии.

в) *(4 балла)* Решите пункт **б)**, если вместо объемов государство наблюдает цены, уплачиваемые потребителями: P_0, P_1, …

г) *(2 балла)* Решите пункт **б)**, если государство в каждый период времени наблюдает и объемы выпуска, и цены.

Решение

а) Монопольный выпуск при наличии субсидии s равен $Q(s) = (a - c + s)/(2b)$, а цена равна $P(s) = (a + c - s)/2$, поэтому чтобы получить $P(s) = c$, надо установить субсидию $s^\star = a - c$.

б) Наблюдая рынок при $t = 0$ (без субсидии, т.е. $s_0 = 0$) и при $t = 1$ (с субсидией s_1), можно составить систему уравнений $Q_0 = (a - c)/(2b)$, $Q_1 = (a - c + s_1)/(2b)$. Разделив одно уравнение на другое, мы можем вычислить оптимальную субсидию:

$$s^\star = a - c = s_1 \frac{Q_0}{Q_1 - Q_0}.$$

При этом данных только нулевого периода не хватит. Действительно, зная только значение $Q_0 = (a - c)/(2b)$, нельзя определить, чему равно $a - c$.

Следовательно, $t^\star = 1$.

Также доказать невозможность нахождения s^* при $t = 0$ можно через контрпример (для разных параметров и разной оптимальной субсидии будут одинаковые выпуски и цены). Например,

$$P = 10 - Q, \quad c = 6, \quad P^* = 8, \quad Q^* = 2, \quad s^* = 4.$$
$$P = 12 - Q, \quad c = 4, \quad P^* = 8, \quad Q^* = 2, \quad s^* = 8.$$

в) Наблюдая рынок при $t = 0$, получаем уравнение $(a + c)/2 = P_0$. Из него нельзя найти $a - c$. Далее, наблюдая рынок при любой субсидии s, мы видим цену $P_0 - s/2$, которую и так можем вычислить, т.е. новые наблюдения не дают новой информации. Так мы никогда и не узнаем величины $s^\star = a - c$, сколько бы ни наблюдали.

г) Наблюдая рынок только при $t = 0$, мы получаем систему уравнений $(a-c)/(2b) = Q_0$, $(a + c)/2 = P_0$. Этих данных недостаточно, чтобы определить $s^\star = a - c$. Действительно, если, например, увеличить a и уменьшить c на одну и ту же малую величину x, а затем изменить параметр b так, чтобы $(a - c)/(2b) = Q_0$ оставалось в силе, то останутся в силе оба уравнения $(a - c)/(2b) = Q_0$, $(a + c)/2 = P_0$, но оптимальная ставка $s^\star$ будет другой (увеличится на $2x$).

Так что придётся установить субсидию s_1 в $t = 1$ и наблюдать P_1 и Q_1. По доказанному в пункте б), только данных об объемах за 2 периода уже будет достаточно. Значит $t^\star = 1$.

Схема проверки

а) Всего за пункт 2 балла, из них:

- К1 Нахождение оптимальных цен $P(s)$ или объёмов $Q(s)$ в монополии при введении субсидии $s \to 1$ балл
- К2 Нахождение оптимальной субсидии $s^* \to 1$ балл
- К3 Если в пункте а) ошибочно найдено s^* (в т.ч. при рассмотрении процентной субсидии), но идейно задача не меняется, то за пункты б), в), г) дается половина баллов
- К4 Если решается идейно другая задача (например, субсидия в совершенной конкуренции, позволяющая получить прибыль, как в монополии), то баллы за пункты б), в), г) не ставятся.

б) Всего за пункт 4 балла, из них:

- К5 Выписывание корректной системы уравнений для Q_0 и $Q_1 \to 1$ балл
- К6 Решение системы уравнений, нахождение оптимальной субсидии $s^* = \frac{s_1 Q_0}{Q_1 - Q_0}$ и $t^* = 1 \to 2$ балла
- К7 Обоснование того, что наблюдения Q_0 недостаточно для определения $s^* \to 1$ балл
- К8 Если не учитывается известная информация о Q_0 в периоде $t = 0$ и рассматриваются только периоды $t = 1{,}2 \to$ штраф 1 балл

в) Всего за пункт 4 балла, из них:

- К9 Обоснование того, что наблюдения P_0 недостаточно для определения $s^* \to 1$ балл
- К10 Обоснование того, что новые наблюдения P_t при $t > 0$ не дают новой информации $\to 3$ балла

г) Всего за пункт 2 балла, из них:

К11 Упоминание того, что наблюдений P_0 и Q_0 недостаточно для определения $s^* \to$ 1 балл

К12 Корректное обоснование того, что наблюдений P_0 и Q_0 недостаточно для определения $s^* \to$ 1 балл

К13 Отсутствие рассмотрения случая $t = 0$ (в том числе, ссылки на аналогичность пунктам б) или в)) не даёт баллов в пункте г).