
Второй тур. Задачи

9 класс

Дата написания	23 марта 2023 г.
Количество заданий	4
Сумма баллов	48
Время написания	3 часа 30 минут

Если не сказано иного, считайте все единицы товаров, ресурсов и активов во всех задачах бесконечно делимыми, а также что фирмы максимизируют прибыль.

Старайтесь излагать свои мысли четко, писать разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта а) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными.

Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все неизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное.

Удачи!

Задача 5. Банковские кризисы**(12 баллов)**

В свете Нобелевской премии по экономике 2022 г. и банковского кризиса в США в марте 2023 г. Всероссийская олимпиада по экономике не могла обойтись без задачи о банковских кризисах. Для ее решения достаточно понимания стимулов экономических агентов и того, что банк привлекает депозиты и выдает кредиты. Знания специализированных концепций, таких как банковский мультипликатор, не требуется.

а) (3 балла) Ключевым элементом кризиса являются *набеги вкладчиков на банки*. При этом ожидания банкротства определенного банка могут являться *самосбывающимися*. Объясните, как работают самосбывающиеся ожидания при набеге на банк.

б) (3 балла) Как развитие современных коммуникационных технологий влияет на то, насколько быстро происходит набег на банк? Ответьте, основываясь на ваших рассуждениях в пункте а).

в) (3 балла) В экономической науке существует дискуссия о том, какая структура связей между банками более устойчива и минимизирует вероятность системного кризиса. В частности, рассматриваются две в некотором смысле противоположные структуры — *распределенная* и *кольцевая*. Они представлены на рисунке:

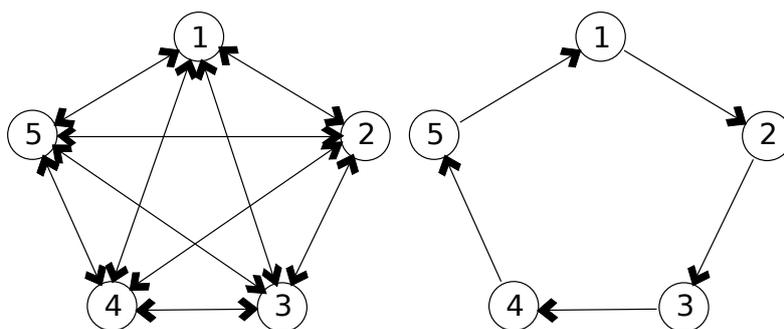


Рис. 5.1: Распределенная (слева) и кольцевая структуры связей между банками.

В *распределенной структуре* каждый банк связан с каждым — иными словами, каждый банк проводит операции (дает кредиты и берет депозиты) с каждым из остальных банков, причем в одинаковых объемах. При *кольцевой структуре* каждый банк дает кредиты одному банку, а принимает депозиты от другого, и так по кругу. То есть банк сохраняет у себя определенную долю в резервы, а остальную часть кладет на депозит в партнерский банк. Кроме изображенных на рисунке связей между банками, есть также и связь каждого банка с реальным сектором — банк берет депозиты у домохозяйств и выдает кредиты различным предприятиям. Из общих соображений кажется, что распределенная структура более устойчива, чем кольцевая. Основываясь на особенностях поведения банков, объясните, почему это может быть не так.

г) (3 балла) Из-за того, что фирмы, занимавшие деньги у разорившихся банков, будут вынуждены брать кредиты в других банках, общество будет нести издержки. Некоторые из этих издержек очевидны: это расходы на бумагу для новых договоров, и т. п. Опишите, какие еще издержки будет нести общество из-за того, что фирмы будут вынуждены брать кредиты в других банках.

Задача 6. КПВ в учебе**(12 баллов)**

Рома — ученик старшей школы, который стремится прилежно учиться. Тем не менее, его силы ограничены. У Ромы есть 180 единиц жизненной энергии, которые он может инвестировать в изучение двух предметов — математики и информатики, по каждому из которых можно получить оценку от 0 до 100 баллов. Каждая единица энергии, потраченная на математику, дает 0,5 балла по математике. С информатикой сложнее: каждая единица энергии, потраченная на информатику, дает 1 балл до достижения оценки x баллов; затем каждая дополнительная единица энергии прибавляет к оценке по информатике лишь 0,5 балла. Обозначим за e_1 и e_2 количества энергии, потраченной на математику и информатику соответственно, за g_1 и g_2 — оценки по математике и информатике соответственно.

Величина x не является константой, а зависит от e_1 по следующему правилу: $x = 8\sqrt{e_1}$. Иными словами, чем больше энергии тратится на математику, тем позже наступает снижение производительности в изучении информатики.

а) (4 балла) Постройте КПВ Ромы в координатах (g_1, g_2) . Выведите уравнение КПВ $g_2(g_1)$. Имейте в виду, что если Рома выучил некий предмет на g баллов, он может написать контрольную и хуже, если того захочет. КПВ может содержать горизонтальный участок.

б) (4 балла) Допустим, Рома посвящает учебе всего себя и максимизирует среднее арифметическое двух оценок. Определите, какие оценки он получит, если оптимально распределит свою энергию. Отметьте полученную точку на рисунке с КПВ.

в) (4 балла) Теперь допустим, что кроме оценок Рома в какой-то степени думает и об отдыхе. А именно, он максимизирует величину $(g_1 + g_2)/2 + e_3/3$, где e_3 — количество жизненной энергии, оставшееся после затрат энергии на учебу. Определите, какие оценки он получит, если оптимально распределит свою энергию. Отметьте полученную точку на рисунке с КПВ.

Задача 7. Торговля без денег**(12 баллов)**

Каждый из семи островов A, B, C, D, E, F, G производит и потребляет все или некоторые из 2023 товаров. Будем обозначать через $d_{ij} \geq 0$ потребность острова i в товаре j , а через $s_{ij} \geq 0$ объем производства островом i товара j , где $i \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$, $j \in \{1, \dots, 2023\}$. Величины d_{ij} и s_{ij} предопределены и неизменны. Между островами возможен обмен, но денег в экономике нет. Будем называть остров i счастливым, если для любого товара j его потребление на острове i не меньше, чем d_{ij} .

а) (3 балла) Предположим, что существует волшебник, который может свободно перераспределять произведенные товары между островами. Запишите условие на d_{ij} , s_{ij} , при котором волшебник может сделать так, чтобы каждый остров был счастливым. Докажите, что 1) если волшебник может каждый остров сделать счастливым, то это условие должно быть выполнено (ваше условие является необходимым), а также что 2) если ваше условие оказалось выполнено, то волшебник может сделать каждый остров счастливым (Ваше условие является достаточным).

б) (6 баллов) Теперь предположим, что волшебника нет, но острова могут обмениваться друг с другом. Каждый остров в рамках любой сделки с другим островом готов

отдать свои товары только в обмен на такое же суммарное количество товаров (например, 5 яблок и 2 груши он готов обменять на 3 банана и 4 апельсина, $5 + 2 = 3 + 4$). Запишите условие на d_{ij} , s_{ij} , при котором острова смогут устроить торговлю (последовательность обменов) так, чтобы каждый остров был в итоге счастливым. Докажите, что это условие является необходимым и достаточным.

в) (3 балла) Наконец, предположим, что каждый остров i в рамках любой сделки с другим островом готов отдать свои товары только в обмен на такое же суммарное количество товаров, в которых сам нуждается, то есть таких товаров j , что $d_{ij} > s_{ij}$. Является ли достаточным условие, которое вы получили в качестве ответа в пункте б), для того, чтобы острова смогли устроить торговлю так, чтобы каждый остров в итоге был счастливым?

Задача 8. Дважды оптимальная субсидия (12 баллов)

Фирма-монополист производит товар «Штуки». Спрос на этот товар описывается уравнением $Q = 80 - P$. Средние издержки производства одной «Штуки» не зависят от выпуска и равны 20. Участник заключительного этапа олимпиады легко определит, что фирма выберет объем производства, равный 30, в то время как если бы рынок «Штук» был конкурентен, рыночный объем производства равнялся бы 60.

Как известно, в обычных условиях совершенно-конкурентный объем выпуска является еще и оптимальным с точки зрения общества. Государство захотело добиться того, чтобы фирма увеличила свой выпуск до этого уровня, то есть с 30 до 60. Один из способов сделать это — предоставить фирме субсидию, которая зависит от выпуска. Пусть $S = f(Q)$, где $Q \geq 0$ — объем проданной продукции, $S \geq 0$ — общая сумма выплачиваемой фирме субсидии. Проблема, однако, в том, что разные схемы субсидирования повлекут за собой разные расходы государства.

Если фирма безразлична между несколькими объемами выпуска, она выбирает наибольший из них.

а) (2 балла) Пусть $f(Q) = aQ$. Какое значение параметра a нужно выбрать государству, чтобы фирма выбрала объем 60? Каковы будут расходы государства на субсидию?

б) (2 балла) Пусть $f(Q) = aQ^2$. Какое значение параметра a нужно выбрать государству, чтобы фирма выбрала объем 60? Каковы будут расходы государства на субсидию?

в) (8 баллов) Допустим, государство может выбрать в качестве схемы выплаты субсидии любую функцию $S = f(Q)$, определенную для всех $Q \in [0; 80]$ и принимающую только неотрицательные значения, — например, $f(Q) = a\sqrt{Q} + bQ^3 + \frac{c}{Q+1}$, или

$f(Q) = \begin{cases} aQ^4, & Q < 10; \\ bQ^4, & Q \geq 10, \end{cases}$ или любую другую (фантазия у государства безгранична). Как

и прежде, функция должна быть такой, чтобы фирма продала 60 «Штук». Какую функцию нужно ввести государству, чтобы расходы на субсидию были минимальны? (Если таких функций несколько, приведите любую из них.) Чему равны эти минимальные расходы?