
Второй тур. Задачи

10 класс

Дата написания	23 марта 2023 г.
Количество заданий	4
Сумма баллов	48
Время написания	3 часа 30 минут

Если не сказано иного, считайте все единицы товаров, ресурсов и активов во всех задачах бесконечно делимыми, а также что фирмы максимизируют прибыль.

Старайтесь излагать свои мысли четко, писать разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта а) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными.

Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все неизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное.

Удачи!

Задача 5. Банковские кризисы**(12 баллов)**

В свете Нобелевской премии по экономике 2022 г. и банковского кризиса в США в марте 2023 г. Всероссийская олимпиада по экономике не могла обойтись без задачи о банковских кризисах. Для ее решения достаточно понимания стимулов экономических агентов и того, что банк привлекает депозиты и выдает кредиты. Знания специализированных концепций, таких как банковский мультипликатор, не требуется.

а) (3 балла) Ключевым элементом кризиса являются *набеги вкладчиков на банки*. При этом ожидания банкротства определенного банка могут являться *самосбывающимися*. Объясните, как работают самосбывающиеся ожидания при набеге на банк.

б) (3 балла) Как развитие современных коммуникационных технологий влияет на то, насколько быстро происходит набег на банк? Ответьте, основываясь на ваших рассуждениях в пункте а).

в) (3 балла) В экономической науке существует дискуссия о том, какая структура связей между банками более устойчива и минимизирует вероятность системного кризиса. В частности, рассматриваются две в некотором смысле противоположные структуры — *распределенная* и *кольцевая*. Они представлены на рисунке:

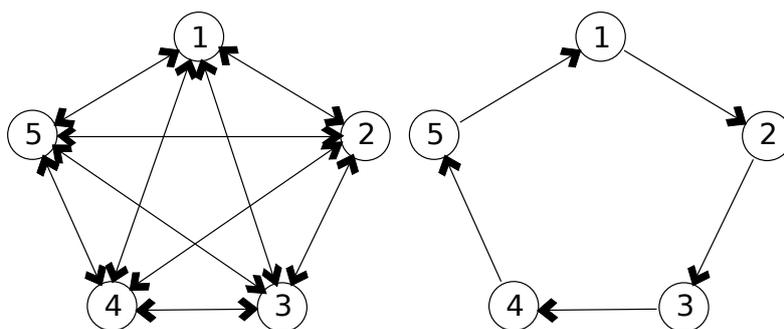


Рис. 5.1: Распределенная (слева) и кольцевая структуры связей между банками.

В *распределенной структуре* каждый банк связан с каждым — иными словами, каждый банк проводит операции (дает кредиты и берет депозиты) с каждым из остальных банков, причем в одинаковых объемах. При *кольцевой структуре* каждый банк дает кредиты одному банку, а принимает депозиты от другого, и так по кругу. То есть банк сохраняет у себя определенную долю в резервы, а остальную часть кладет на депозит в партнерский банк. Кроме изображенных на рисунке связей между банками, есть также и связь каждого банка с реальным сектором — банк берет депозиты у домохозяйств и выдает кредиты различным предприятиям. Из общих соображений кажется, что распределенная структура более устойчива, чем кольцевая. Основываясь на особенностях поведения банков, объясните, почему это может быть не так.

г) (3 балла) Из-за того, что фирмы, занимавшие деньги у разорившихся банков, будут вынуждены брать кредиты в других банках, общество будет нести издержки. Некоторые из этих издержек очевидны: это расходы на бумагу для новых договоров, и т. п. Опишите, какие еще издержки будет нести общество из-за того, что фирмы будут вынуждены брать кредиты в других банках.

Задача 6. КПВ в учебе**(12 баллов)**

Рома — ученик старшей школы, который стремится прилежно учиться. Тем не менее, его силы ограничены. У Ромы есть 180 единиц жизненной энергии, которые он может инвестировать в изучение двух предметов — математики и информатики, по каждому из которых можно получить оценку от 0 до 100 баллов. Каждая единица энергии, потраченная на математику, дает 0,5 балла по математике. С информатикой сложнее: каждая единица энергии, потраченная на информатику, дает 1 балл до достижения оценки x баллов; затем каждая дополнительная единица энергии прибавляет к оценке по информатике лишь 0,5 балла. Обозначим за e_1 и e_2 количества энергии, потраченной на математику и информатику соответственно, за g_1 и g_2 — оценки по математике и информатике соответственно.

Величина x не является константой, а зависит от e_1 по следующему правилу: $x = 8\sqrt{e_1}$. Иными словами, чем больше энергии тратится на математику, тем позже наступает снижение производительности в изучении информатики.

а) (4 балла) Постройте КПВ Ромы в координатах (g_1, g_2) . Выведите уравнение КПВ $g_2(g_1)$. Имейте в виду, что если Рома выучил некий предмет на g баллов, он может написать контрольную и хуже, если того захочет. КПВ может содержать горизонтальный участок.

б) (4 балла) Допустим, Рома посвящает учебе всего себя и максимизирует среднее арифметическое двух оценок. Определите, какие оценки он получит, если оптимально распределит свою энергию. Отметьте полученную точку на рисунке с КПВ.

в) (4 балла) Теперь допустим, что кроме оценок Рома в какой-то степени думает и об отдыхе. А именно, он максимизирует величину $(g_1 + g_2)/2 + e_3/3$, где e_3 — количество жизненной энергии, оставшееся после затрат энергии на учебу. Определите, какие оценки он получит, если оптимально распределит свою энергию. Отметьте полученную точку на рисунке с КПВ.

Задача 7. Продажа информации**(12 баллов)**

На рынке ценных бумаг выставлены на продажу пакеты акций трех компаний-стартапов А, В и С, каждый по цене 30 млн руб. Компании конкурируют друг с другом, и ожидается, что через год ровно одна из них добьется успеха и её акции будут стоить 54 млн руб., а две другие разорятся и их акции будут иметь нулевую стоимость. Какая именно компания успешная, заранее неизвестно: с равными вероятностями это может быть любая из трех.

Аналитик предлагает услуги исследования рынка и рекомендаций инвесторам, являясь монополистом в этой области. В результате исследования рынка аналитику удастся выяснить ровно об одной случайно выбранной¹ компании правдивую информацию, станет ли она успешной. Издержки на исследование составляют 2 млн руб. После этого аналитик дает рекомендацию, в какие именно акции инвестировать: если он знает, какая компания станет успешной, то её и рекомендует, а если ему известно лишь, что некоторая компания разорится, то он случайным образом выбирает из двух других. Впрочем, вместо добросовестного исследования рынка аналитик

¹Здесь и далее предполагается, что случайный выбор происходит с равными вероятностями.

может имитировать его, просто порекомендовав купить акции случайно выбранной из трех компании — на это он издержек не несет. Если аналитик безразличен между тем, проводить исследование или имитировать его, он проводит исследование.

Инвестор рассматривает возможность купить акции одной из компаний. Для этого он готов воспользоваться услугами аналитика и приобрести у него некоторый информационный продукт, если ожидает неотрицательную прибыль по итогам всего предприятия. На основе полученной информации инвестор принимает решение, покупать ли акции. Инвестор самостоятельно не может исследовать рынок или наблюдать за деятельностью аналитика.

Каждый экономический агент максимизирует математическое ожидание своей прибыли с учетом той информации, которой обладает. Если прибыль случайна и может принимать два значения π_1 и π_2 с вероятностями q_1 и q_2 соответственно, то математическим ожиданием прибыли является величина $q_1\pi_1 + q_2\pi_2$. Например, если инвестор самостоятельно, не пользуясь услугами аналитика, купит акции компании А, то его ожидаемая прибыль (математическое ожидание прибыли) составит $\frac{1}{3}(54 - 30) + \frac{2}{3}(0 - 30) = -12$ млн руб. Оба агента знают всю информацию, данную выше в условии.

а) (2 балла) Пусть аналитик назначает цену $p \geq 0$ за рекомендацию, какие акции покупать. Если инвестор соглашается, он платит p просто за рекомендацию. Какую максимальную цену p готов заплатить инвестор за рекомендацию на таких условиях?

б) (4 балла) Пусть аналитик дает инвестору рекомендацию на следующих условиях: при любом исходе инвестор платит аналитику фиксированную сумму $p \geq 0$, а через год, в случае успеха компании, акции которой куплены, — еще дополнительно премию $b \geq 0$. Каким должен быть размер премии b , чтобы аналитик был заинтересован в добросовестном исследовании рынка? Какие параметры контракта p и b выберет аналитик, будучи монополистом? Возможно, оптимальных контрактов более одного — тогда предложите любой их них.

в) (4 балла) Предположим, что аналитик может предоставить инвестору сертификат, подтверждающий выполнение исследования рынка и содержащий всю информацию, которую при этом удалось выяснить. Дополнительные расходы аналитика на сертификацию составляют 1 млн руб. Решение о сертификации принимается аналитиком перед началом исследования рынка. Инвестор платит аналитику за этот информационный продукт цену $p \geq 0$, не зависящую от содержания сертификата. Использование премии за успешный исход инвестиций, как в пункте б), не предусмотрено. Как решение инвестора о покупке акций зависит от содержания сертификата? Какую цену p назначит аналитик?

г) (2 балла) Может ли комбинация информационных продуктов из б) и в) принести аналитику прибыль большую, чем каждый из них?

Задача 8. Дважды оптимальная субсидия (12 баллов)

Фирма-монополист производит товар «Штуки». Спрос на этот товар описывается уравнением $Q = 80 - P$. Средние издержки производства одной «Штуки» не зависят от выпуска и равны 20. Участник заключительного этапа олимпиады легко определит, что фирма выберет объем производства, равный 30, в то время как если бы рынок «Штук» был конкурентен, рыночный объем производства равнялся бы 60.

Как известно, в обычных условиях совершенно-конкурентный объем выпуска является еще и оптимальным с точки зрения общества. Государство захотело добиться того, чтобы фирма увеличила свой выпуск до этого уровня, то есть с 30 до 60. Один из способов сделать это — предоставить фирме субсидию, которая зависит от выпуска. Пусть $S = f(Q)$, где $Q \geq 0$ — объем проданной продукции, $S \geq 0$ — общая сумма выплачиваемой фирме субсидии. Проблема, однако, в том, что разные схемы субсидирования повлекут за собой разные расходы государства.

Если фирма безразлична между несколькими объемами выпуска, она выбирает наибольший из них.

а) (2 балла) Пусть $f(Q) = aQ$. Какое значение параметра a нужно выбрать государству, чтобы фирма выбрала объем 60? Каковы будут расходы государства на субсидию?

б) (2 балла) Пусть $f(Q) = aQ^2$. Какое значение параметра a нужно выбрать государству, чтобы фирма выбрала объем 60? Каковы будут расходы государства на субсидию?

в) (8 баллов) Допустим, государство может выбрать в качестве схемы выплаты субсидии любую функцию $S = f(Q)$, определенную для всех $Q \in [0; 80]$ и принимающую только неотрицательные значения, — например, $f(Q) = a\sqrt{Q} + bQ^3 + \frac{c}{Q+1}$, или

$f(Q) = \begin{cases} aQ^4, & Q < 10; \\ bQ^4, & Q \geq 10, \end{cases}$ или любую другую (фантазия у государства безгранична). Как

и прежде, функция должна быть такой, чтобы фирма продала 60 «Штук». Какую функцию нужно ввести государству, чтобы расходы на субсидию были минимальны? (Если таких функций несколько, приведите любую из них.) Чему равны эти минимальные расходы?